

第4章 离散信道容量

§4.3 多符号离散信道的容量

1

第4章 离散信道容量的主要内容

- 4.0 信道的定义及其数学模型和分类
- 4.1 互信息量和平均互信息量
- 4.2 单符号离散信道的信道容量
- 4.3 多符号离散信道的信道容量
 - 4.3.1 多符号离散信道数学模型
 - 4.3.2 多符号离散信道容量定义
 - 4.3.3 离散无记忆信道N次扩展信道的信道容量
 - 4.3.4 独立并联信道的信道容量

2

4.3 多符号离散信道的信道容量

- 4.3.1 多符号离散信道数学模型
- 4.3.2 多符号离散信道容量定义
- 4.3.3 离散无记忆信道N次扩展信道的信道容量
- 4.3.4 独立并联信道的信道容量

3

多符号离散信道定义

定义

单符号离散信道：信道的输入和输出均可用单个的随机变量 X, Y 描述。单符号信源+信道信道的转移特性由信道转移概率矩阵 $P\{Y/X\}$ 描述。

多符号离散信道：传输信道还是离散信道本身，只是每次输入输出有多个符号在不同时刻进行数据传递。多符号信源+信道信道的转移特性由信道转移概率矩阵 $P\{Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N\}$ 描述。

4

根据信道是否具有记忆特性，可将信道划分为：

- 无记忆信道：信道在任意时刻的输出只取决于当前时刻的输入，而与之前和之后时刻的输入和输出都无关。
- 有记忆信道：信道在某一时刻的输出不仅取决于当前时刻的输入，还与之前或之后时刻的输入或输出有关。

根据信道统计特性是否随时间变化，可将信道划分为：

- 平稳信道：信道的统计特性不随时间变化。（恒参）
- 非平稳信道：信道的统计特性随时间而变化。（变参）

为简化起见，本课程只研究平稳无记忆信道。

5

多符号离散信道的数学模型

无记忆信道的数学模型：

$$P\{Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N\} = \prod_{k=1}^N P\{Y_k / X_k\} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad *$$

解释： $P\{Y_1 Y_2 / X_1 X_2\} = P\{Y_1 / X_1 X_2\} \cdot P\{Y_2 / X_1 X_2 Y_1\}$
 $= P\{Y_1 / X_1\} \cdot P\{Y_2 / X_2\}$

物理意义：输入随机序列与输出随机序列之间的转移概率等于各离散时刻随机变量间转移概率的连乘。

平稳信道的数学模型： $\forall i \in \mathbb{Z}$

$$P\{Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N\} = P\{Y_{1+i} Y_{2+i} \cdots Y_{N+i} / X_{1+i} X_{2+i} \cdots X_{N+i}\}$$

6

单符号信道即为平稳无记忆信道。

解释：非平稳信道 $\rightarrow P\{Y_1/X_1\}, P\{Y_2/X_2\}, \dots$

有记忆信道 $\rightarrow P\{Y_1/X_1\}, P\{Y_2/X_2X_1Y_1\}, \dots$

单符号信道可由 $P\{Y/X\}$ 描述 $\rightarrow$ 平稳无记忆信道

单符号信道：
$$\begin{array}{ccc} \dots\dots X_2 X_1 & \boxed{\text{信道}} & \dots\dots Y_2 Y_1 \\ \{x_1, x_2, \dots, x_n\} & & \{y_1, y_2, \dots, y_m\} \end{array}$$

单符号信源+无记忆信道

平稳无记忆信道 $\dots\dots \boxed{X_N \dots X_2 X_1}$ $\boxed{\text{信道}}$ $\dots\dots \boxed{Y_N \dots Y_2 Y_1}$
 的N次扩展信道： $\{a_1, a_2, \dots, a_{n^N}\}$ $\boxed{\text{信道}}$ $\{b_1, b_2, \dots, b_{m^N}\}$

多符号信源+无记忆信道

7

多符号信道的数学模型

单符号离散信道：

$$\begin{array}{c} \text{行} \\ \downarrow \\ X \end{array} \begin{array}{c} \text{列} \rightarrow Y \\ \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \\ p(y_1/x_1) & p(y_2/x_1) & \dots & p(y_m/x_1) \\ p(y_1/x_2) & p(y_2/x_2) & \dots & p(y_m/x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(y_1/x_n) & p(y_2/x_n) & \dots & p(y_m/x_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

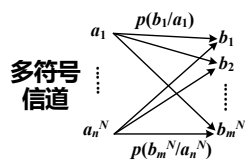
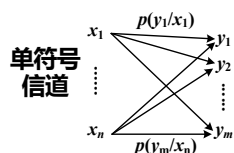
多符号离散信道：

$$\begin{array}{c} \text{行} \\ \downarrow \\ X_1 \dots X_N \\ \downarrow \\ \text{同一符号集} \\ \{x_1, \dots, x_n\} \end{array} \begin{array}{c} \text{列} \rightarrow Y_1 \dots Y_N \rightarrow \text{同一符号集} \\ \begin{bmatrix} y_1 y_1 \dots y_1 & y_1 y_1 \dots y_2 & \dots & y_m y_m \dots y_m \\ b_1 & b_2 & \dots & b_{m^N} \\ p(b_1/a_1) & p(b_2/a_1) & \dots & p(b_{m^N}/a_1) \\ p(b_1/a_2) & p(b_2/a_2) & \dots & p(b_{m^N}/a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(b_1/a_{n^N}) & p(b_2/a_{n^N}) & \dots & p(b_{m^N}/a_{n^N}) \end{bmatrix} \end{array}$$

共 $n^N \times m^N$ 个元素

8

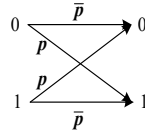
$$\begin{bmatrix} p(b_1/a_1) & p(b_2/a_1) & \dots & p(b_{m^N}/a_1) \\ p(b_1/a_2) & p(b_2/a_2) & \dots & p(b_{m^N}/a_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p(b_1/a_{n^N}) & p(b_2/a_{n^N}) & \dots & p(b_{m^N}/a_{n^N}) \end{bmatrix} \begin{array}{l} \rightarrow \Sigma = 1 \\ \rightarrow \Sigma = 1 \\ \vdots \\ \rightarrow \Sigma = 1 \end{array}$$



9

例3.3.1 求二元对称信道二次扩展信道的信道矩阵

单符号信道

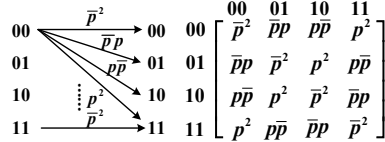


$$\begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix}$$

信道矩阵

二次扩展信道

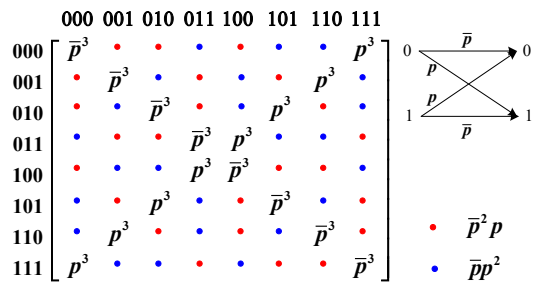
$$P(Y_1Y_2/X_1X_2) = P(Y_1/X_1) \cdot P(Y_2/X_2)$$



$$\begin{bmatrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ 00 & \bar{p}^2 & \bar{p}p & p\bar{p} & p^2 \\ 01 & \bar{p}p & \bar{p}^2 & p^2 & p\bar{p} \\ 10 & p\bar{p} & p^2 & \bar{p}^2 & \bar{p}p \\ 11 & p^2 & p\bar{p} & \bar{p}p & \bar{p}^2 \end{bmatrix}$$

10

练习：求二元对称信道三次扩展信道的信道矩阵



11

4.3 多符号离散信道的信道容量

- 4.3.1 多符号离散信道数学模型
- 4.3.2 多符号离散信道容量定义
- 4.3.3 离散无记忆信道N次扩展信道的信道容量
- 4.3.4 独立并联信道的信道容量

12

4.3.2 多符号离散信道容量定义

- 多符号离散信道的平均互信息量：

$$I(X;Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(\alpha_i, \beta_j) I(\alpha_i; \beta_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p(\alpha_i, \beta_j) \frac{p(\alpha_i, \beta_j)}{p(\alpha_i)}$$

$$I(X;Y) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \sum_{j_1=1}^m \cdots \sum_{j_k=1}^m p(a_{i_1} \cdots a_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_k}) \log_2 \frac{p(a_{i_1} \cdots a_{i_k} b_{j_1} \cdots b_{j_k})}{p(a_{i_1} \cdots a_{i_k})}$$

- 多符号离散信道容量定义为：

$$C = \max_{\{p(\alpha_i)\}} I(X;Y), \quad i = 1, 2, \dots, n^N \quad *$$

13

4.3 多符号离散信道的信道容量

- 4.3.1 多符号离散信道数学模型
- 4.3.2 多符号离散信道容量定义
- 4.3.3 离散无记忆信道N次扩展信道的信道容量
- 4.3.4 独立并联信道的信道容量

14

4.3.3 离散无记忆信道N次扩展信道的信道容量

定理：若离散无记忆信道的输入和输出分别是N长序列，则平均互信息量满足：

$$I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

证明： $I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) = H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) -$

其中第一项： $H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N)$

$$H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) = H(Y_1) + H(Y_2 / Y_1) + \cdots + H(Y_N / Y_1 Y_2 \cdots Y_{N-1})$$

$$\leq H(Y_1) + H(Y_2) + \cdots + H(Y_N) = \sum_{k=1}^N H(Y_k)$$

问题：上式何时取等号？

回答：N个时刻的输出符号统计独立时。

15

再看第二项：

$$\begin{aligned}
 H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N) &= H(Y_1 / X_1 X_2 \cdots X_N) + \\
 &\quad H(Y_2 / X_1 X_2 \cdots X_N Y_1) + \cdots + H(Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N Y_1 Y_2 \cdots Y_{N-1}) \\
 &= H(Y_1 / X_1 X_2 \cdots X_N) \\
 &= - \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_N=1}^m \sum_{j_1=1}^m p(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N} y_{j_1}) \log p(y_{j_1} / x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}) \\
 &= - \sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_N=1}^m \sum_{j_1=1}^m p(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N} y_{j_1}) \log p(y_{j_1} / x_{i_1}) \text{【无记忆性】} \\
 &= - \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^m \log p(y_{j_1} / x_{i_1}) \sum_{i_2=1}^m \cdots \sum_{i_N=1}^m p(x_{i_2} \cdots x_{i_N} y_{j_1}) \\
 &= - \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^m \log p(y_{j_1} / x_{i_1}) \cdot p(x_{i_2} \cdots x_{i_N} y_{j_1}) = H(Y_1 / X_1)
 \end{aligned}$$

16

类似地，可证明：

$$\begin{aligned}
 H(Y_2 / X_1 X_2 \cdots X_N Y_1) &= H(Y_2 / X_2) \\
 &\vdots \\
 H(Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N Y_1 Y_2 \cdots Y_{N-1}) &= H(Y_N / X_N) \\
 \therefore H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N) &= \sum_{k=1}^N H(Y_k / X_k)
 \end{aligned}$$

代入前面得到的第一项，有：

$$\begin{aligned}
 I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) &= H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N) - \\
 &\quad H(Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N) \\
 &\leq \sum_{k=1}^N H(Y_k) - \sum_{k=1}^N H(Y_k / X_k) \\
 &= \sum_{k=1}^N [H(Y_k) - H(Y_k / X_k)] = \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)
 \end{aligned}$$

17

$$I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k)$$

物理意义： 对于离散无记忆信道的 N 次扩展信道，其总体的平均互信息量不大于各时刻单符号对应的平均互信息量之和。

问题： 上式何时取等号？

分析： N 个时刻的输出符号统计独立时。

问题： 输入符号之间是何关系时，输出符号统计独立？

结论： 当信源是无记忆信源的 N 次扩展信源时，输出符号之间统计独立。

即： 当满足 $p(a_i) = p(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}) = p(x_{i_1}) p(x_{i_2}) \cdots p(x_{i_N})$ $i=1, \cdots, n^N$

18

证明：当 $p(a_i) = p(x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_N}) = p(x_{i_1}) p(x_{i_2}) \cdots p(x_{i_N}) \quad i=1, \cdots, n^N$
 有 $p(b_j) = p(y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_N}) = p(y_{j_1}) p(y_{j_2}) \cdots p(y_{j_N}) \quad j=1, \cdots, m^N$

证： $p(b_j) = p(y_{j_1} y_{j_2} \cdots y_{j_N})$

$$= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_N=1}^n p(x_{i_1} \cdots x_{i_N}) p(y_{j_1} \cdots y_{j_N} / x_{i_1} \cdots x_{i_N}) \quad \text{【全概率公式】}$$

$$= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_N=1}^n p(x_{i_1}) p(x_{i_2}) \cdots p(x_{i_N}) p(y_{j_1} / x_{i_1}) \cdots p(y_{j_N} / x_{i_N})$$

【无记忆信源】 【无记忆信道】

$$= \sum_{i_1=1}^n p(x_{i_1}) p(y_{j_1} / x_{i_1}) \sum_{i_2=1}^n p(x_{i_2}) p(y_{j_2} / x_{i_2}) \cdots \sum_{i_N=1}^n p(x_{i_N}) p(y_{j_N} / x_{i_N})$$

$$= p(y_{j_1}) p(y_{j_2}) \cdots p(y_{j_N}) \quad \text{【全概率公式】}$$

19

综合前面的分析，可得如下重要结论：

$$I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k) \quad *$$

1. 离散无记忆信道的 N 次扩展信道，其平均互信息，不大于 N 个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ 分别单独通过信道的平均互信息量之和。
2. 仅当输入端的 N 个输入随机变量统计独立时(即无记忆信源的 N 次扩展信源)，信道的总平均互信息等于这 N 个变量单独通过信道的平均互信息之和。
3. 由于研究的是平稳信源和平稳信道，最终有：

$$I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) = N \cdot I(X; Y) \quad C^N = NC \quad *$$

单位：比特/符号 $x_1 x_1 \cdots x_1, x_1 x_1 \cdots x_2$

20

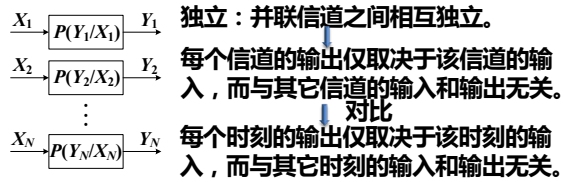
4.3 多符号离散信道的信道容量

- 4.3.1 多符号离散信道数学模型
- 4.3.2 多符号离散信道容量定义
- 4.3.3 离散无记忆信道 N 次扩展信道的信道容量
- 4.3.4 独立并联信道的信道容量

21

4.3.4 独立并联信道

典型应用：通过多个信道并行传输，加快传输速度。



$$\Rightarrow P(Y_1 Y_2 \cdots Y_N / X_1 X_2 \cdots X_N) = \prod_{k=1}^N P(Y_k / X_k)$$

22

离散无记忆信道N次扩展信道的结论可推广到独立并联信道。

$$1. I(X_1 X_2 \cdots X_N; Y_1 Y_2 \cdots Y_N) \leq \sum_{k=1}^N I(X_k; Y_k) \quad *$$

一般情况下，N个独立信道总的平均互信息量小于各信道的平均互信息量之和。

$$2. C_{\text{并}} = \sum_{k=1}^N C_k \quad *$$

独立并联信道的信道容量等于各自信道容量的和，但必须满足如下条件：

- (1) 各信源之间是相互独立的。
- (2) 各信源同时达到最佳输入分布。

23

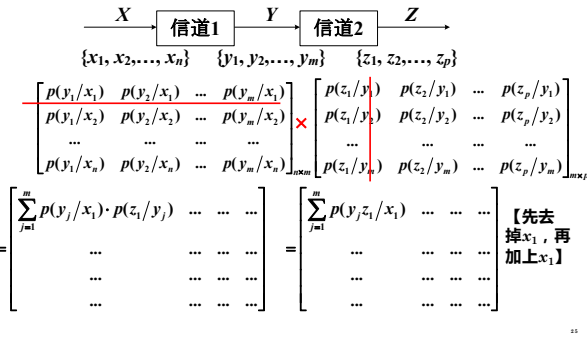
补充内容

- 1、级联(串联)信道
- 2、信道编码定理（香农第二定理）

24

1、级联(串联)信道

典型实例：卫星电视，微波接力通信等。



25

$$[P(Y/X)] \times [P(Z/Y)] = \begin{bmatrix} p(z_1/x_1) & p(z_2/x_1) & \dots & p(z_p/x_1) \\ p(z_1/x_2) & p(z_2/x_2) & \dots & p(z_p/x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p(z_1/x_n) & p(z_2/x_n) & \dots & p(z_p/x_n) \end{bmatrix}_{n \times p} = [P(Z/X)]$$

结论：对于级联信道，总的信道矩阵等于各级信道矩阵的连乘积。（注意乘积顺序）

例：设有两个离散二元对称信道，求二者级联信道的信道容量。

26

解：
$$P = \begin{bmatrix} \bar{p} & p \\ p & \bar{p} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q} & q \\ q & \bar{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}\bar{q} + pq & \bar{p}q + p\bar{q} \\ p\bar{q} + \bar{p}q & pq + \bar{p}\bar{q} \end{bmatrix}$$

级联后的等效信道也是二元对称信道。

根据强对称信道的计算公式： $C = \log n - H(\text{行熵})$

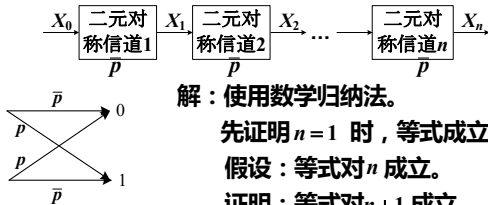
$\therefore C = 1 - H(\bar{p}\bar{q} + pq)$

$$= 1 - [-(\bar{p}\bar{q} + pq) \log(\bar{p}\bar{q} + pq) - (\bar{p}q + p\bar{q}) \log(\bar{p}q + p\bar{q})]$$

27

例：把 n 个离散二元对称信道级联起来，要求证明该信道可以等效于一个二元对称信道，其错误传递概率为 $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$ 。证明当 $n \rightarrow \infty$ 时，且 $0 < p < 1$ 时有：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I[X_0; X_n] = 0$$



解：使用数学归纳法。

先证明 $n=1$ 时，等式成立。

假设：等式对 n 成立。

证明：等式对 $n+1$ 成立。

28

证明：错误传递概率为 $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^n]$ 。

证：当 $n=1$ 时， $\frac{1}{2}[1-(1-2p)^1] = p$
 $\therefore n=1$ 时成立。

假设：等式对 n 成立 则再级联一级后，有：

$$\begin{aligned} \text{总转移概率矩阵} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] \\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] & 1 - \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] \\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^n] & \frac{1}{2}[1+(1-2p)^n] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-p & p \\ p & 1-p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

29

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[1+(1-2p)^{n+1}] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] \\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] & \frac{1}{2}[1+(1-2p)^{n+1}] \end{bmatrix} \quad \text{【化简步骤略】} \\ &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] & \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] \\ \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] & 1 - \frac{1}{2}[1-(1-2p)^{n+1}] \end{bmatrix} \quad \therefore \text{得证} \end{aligned}$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时且 $0 < p < 1$ ，上述信道矩阵趋近于：

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{强噪声信道} \\ \text{无用信道} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{代入 } C = \log 2 - H(\text{行熵}), \text{得:} \\ C = \log 2 - (-2 \cdot \frac{1}{2} \log \frac{1}{2}) = 0 \end{array}$$

30

2、信道编码定理：结论(数学描述)：

若有一离散无记忆平稳信道，其信道容量为 C 。输入序列长度为 L ，只要待传送的信息率 $R < C$ ，当 L 足够长时，对任意指定的任意大于零的正数 ε ，总可以找到一种编码，使得译码差错概率 $P_e < \varepsilon$ 。反之，当 $R > C$ 时，任何编码的 P_e 必大于零，当 $L \rightarrow \infty$ 时， $P_e \rightarrow 1$ 。

对连续信道也有类似的结论。

对信道编码定理严格的数学证明可参见傅祖芸老师教材中的§6.4节。

31

直观解释：



要求以速率为 R 进行无失真地传输，你能办到吗？

$R \leq C$ 放心吧，我有办法！

$R > C$ 对不起，无能为力！你找别人吧！

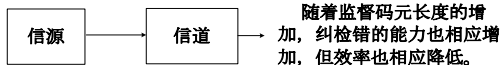
分析：信道容量 C 表示的是信道的极限信息传输能力。如果要求的信息传输速率超过了 C ，无法实现无失真传输；否则，则总可以找到某种方法实现近乎无失真的传输。

32

通过刚才的分析，只要 $R \leq C$ ，理论上就可实现近乎无失真地传输。但具体如何实现呢？香农先生只给出了大的指导方向，即通过编码的方法。具体而言，就是**增加信道符号序列的长度**。

信道编码的最基本思想：在信息码元的基础上增加监督码元，通过信道符号序列长度的增加实现传输差错的检验与纠正。

是 第一种方法 1 : 是 0 : 否 无差错检验能力
否 第二种方法 111 : 是 000 : 否 可检2位错，纠1位错
随着监督码元长度的增加，纠错能力也相应增加，但效率也相应降低。



33

作业

- 第二版：2.5, 2.10, 2.11, 3.1, 3.2, 3.6, 3.7
- 第三版：4.1, 4.2, 4.3, 4.5, 4.6, 4.10, 4.11

51
