第二章 电磁场的基本规律

2.1 电荷守恒定律

2.2 真空中静电场的基本规律

2.3 真空中恒定磁场的基本规律

2.4 媒质的电磁特性

2.5 电磁感应定律和位移电流

2.6 麦克斯韦方程组

2.7 电磁场的边界条件

各个重点，招招致命！

第二章 电磁场的基本规律

麦克斯韦方程组

电磁感应定律

媒质的电磁特性

静电场

恒定磁场

源 电荷

运动

电流 源

电荷守恒定律

2.1 电荷守恒定律

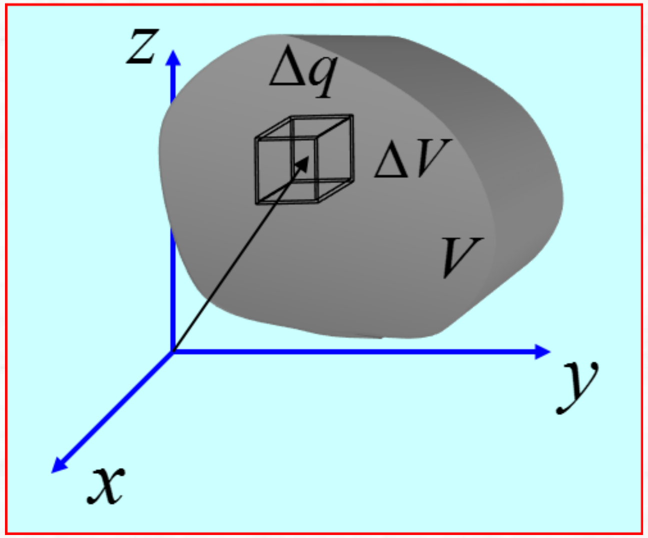
本节内容

2.1.1 电荷与电荷密度
2.1.2 电流与电流密度
2.1.3 电荷守恒定律与电流连续性方程

都是重点

1. 电荷体密度

$$\boxed{\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta V} = \frac{\mathrm{d}q(\vec{r})}{\mathrm{d}V}} \qquad \left(\mathrm{C/m^3}\right)$$

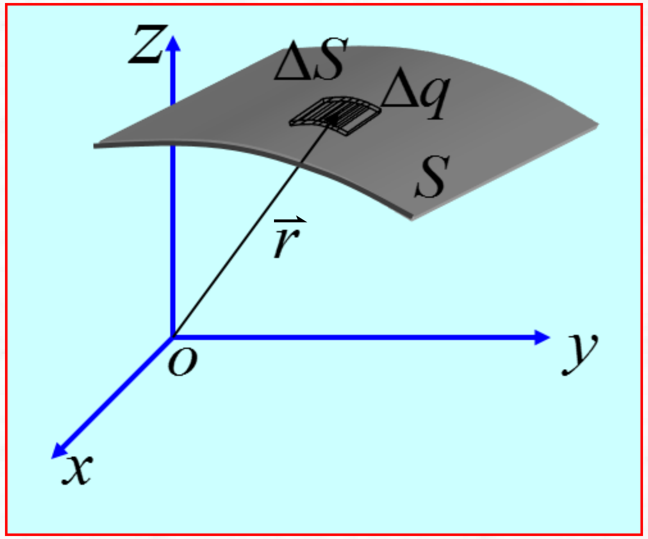


总电荷量

$$\boxed{q = \int_V \rho(\vec{r})\mathrm{d}V}$$

2. 电荷面密度

$$\boxed{\rho_S(\vec{r}) = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta q(\vec{r})}{\Delta S} = \frac{\mathrm{d}q(\vec{r})}{\mathrm{d}S}} \qquad \left(\mathrm{C/m^2}\right)$$

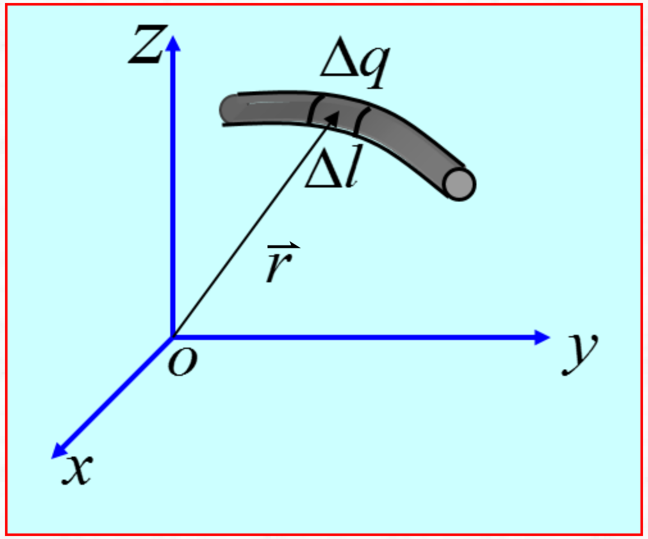


总电荷量

$$\boxed{q = \int_S \rho(\vec{r})\mathrm{d}S}$$

3. 电荷线密度

$$\rho_l(\vec{\boldsymbol{r}})=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q(\vec{\boldsymbol{r}})}{\Delta l}=\frac{\mathrm{d}q(\vec{\boldsymbol{r}})}{\mathrm{d}l}\qquad (\mathrm{C/m})$$

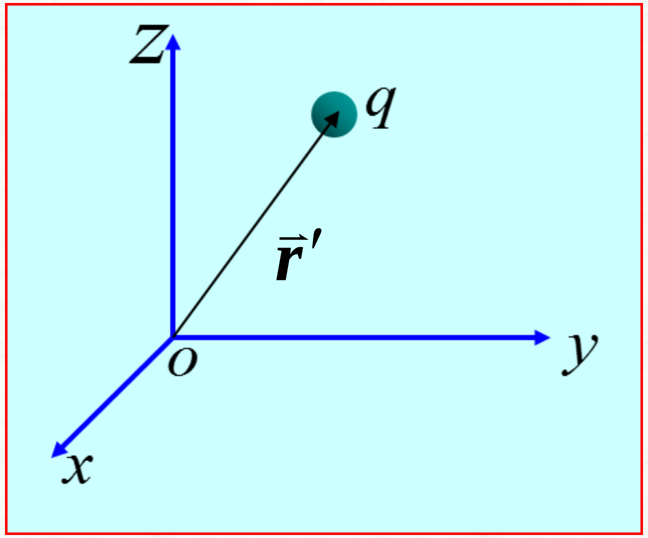


总电荷量

$$q=\int_l \rho_l(\vec{\boldsymbol{r}})\mathrm{d}l$$

4. 点电荷（位置$\vec{r}'$）

$$\rho(\vec{\boldsymbol{r}})=q\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')$$



$$\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')=\begin{cases}0, & \vec{\boldsymbol{r}}\neq\vec{\boldsymbol{r}}'\\ \infty, & \vec{\boldsymbol{r}}=\vec{\boldsymbol{r}}'\end{cases}$$

$$\int_V \delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}V=\begin{cases}0, & V\text{包含}\vec{\boldsymbol{r}}'\\ 1, & V\text{不含}\vec{\boldsymbol{r}}'\end{cases}$$

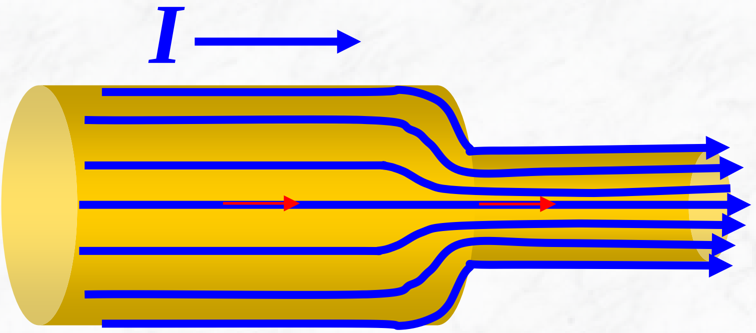
电荷 → 电流

电流：单位时间内通过某一曲面的S电荷量

$$\boxed{\boldsymbol{i}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}\quad (\mathrm{A})$$

恒定电流则记为I

一般情况下，不同位置的电流大小、方向不同



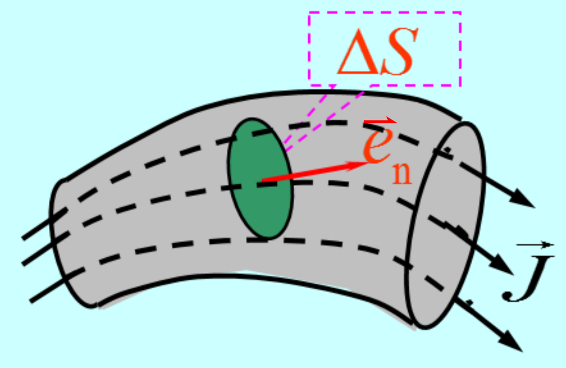
体电流、面电流、线电流

1. 体电流

电流密度矢量

$$\vec{J}(\vec{r}) = \vec{e}_n \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta i(\vec{r})}{\Delta S} = \vec{e}_n \frac{\mathrm{d}i(\vec{r})}{\mathrm{d}S} \quad (\mathrm{A/m^2})$$

正电荷运动方向



体电流密度矢量

通过任意曲面S的电流

$$i = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

投影？ 通量？

与电荷体密度关系为

电中性导体中的电流密度能否不为零？

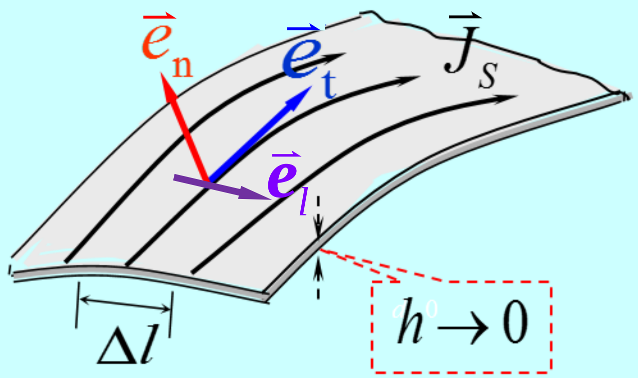
$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

？

2. 面电流

面电流密度矢量

$$\boxed{\vec{J}_S(\vec{r}) = \vec{e}_J \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta i(\vec{r})}{\Delta l} = \vec{e}_J \frac{\mathrm{d}i(\vec{r})}{\mathrm{d}l}} \quad (\mathrm{A/m})$$



面电流密度矢量

通过有向曲线l的电流　方向?

$$\vec{e}_t = \vec{e}_n \times \vec{e}_l$$

$$i = \int_C \vec{J}_S(\vec{r}) \cdot \vec{e}_t \mathrm{d}l = \int_C \vec{J}_S(\vec{r}) \cdot (\vec{e}_n \times \vec{e}_l)\mathrm{d}l = \int_C \vec{J}_S(\vec{r}) \cdot \left(\vec{e}_n \times \mathrm{d}\vec{l}\right)$$

面电流却是线积分？

穿过单位长度的电流

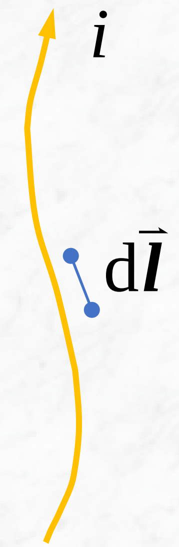
与电荷面密度关系为 ？

$$\boxed{\vec{J}_S = \rho_S \vec{v}}$$

3. 线电流 i

线电流与电荷线密度关系

$$\boxed{i = \rho_l v}$$



4. 电流元

$$\boxed{i\mathrm{d}\vec{l}} \qquad \boxed{\vec{J}_S\mathrm{d}S} \qquad \boxed{\vec{J}\mathrm{d}V}$$

线电流元 **面电流元** **体电流元**

电流与电荷运动定量对应的前提？

电荷守恒

电荷守恒定律

定律 VS 定理？

电荷既不能被创造，也不能被消灭，只能被转移！

流出闭合曲面S 的电流等于体积V 内单位时间所减少的电荷量

电流连续性方程

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho \mathrm{d}V}$$

积分形式

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

微分形式 ？

恒定电流的连续性方程

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0} \qquad \boxed{\nabla \cdot \vec{J} = 0} \longleftarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ ？}$$

2.2 真空中静电场的基本规律

本节内容 都是重点

2.2.1 库仑定律 电场强度

2.2.2 静电场的散度与旋度

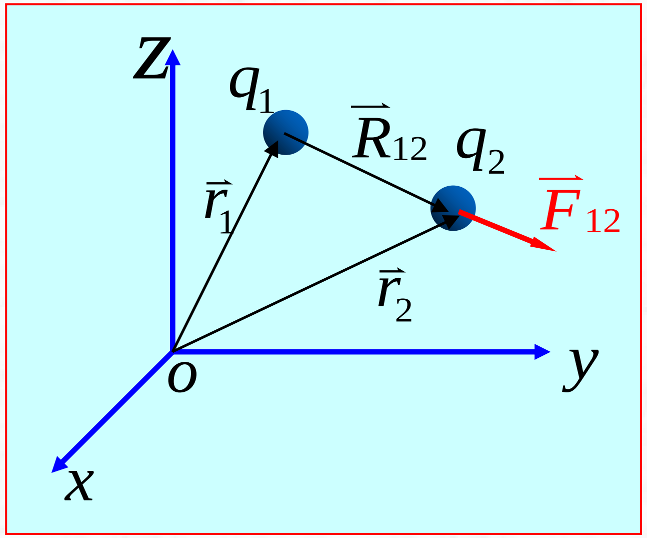
静电场：由静止电荷产生的电场。

1. 库仑定律与电场强度

库仑定律：真空中两个静止点电荷间的作用力为

$$\vec{F}_{12}=\vec{e}_{12}\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}^2}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0R_{12}^3}\vec{R}_{12}$$

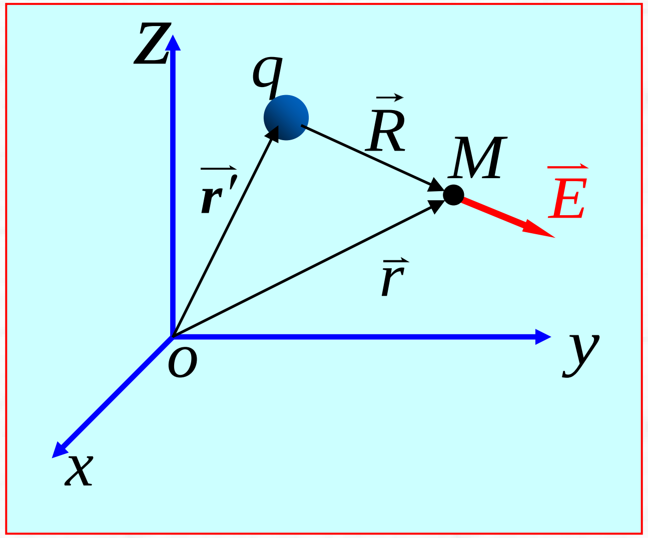
说明？



前提条件：1）真空；2）静止；3）点电荷。

电场强度

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0R^3}\vec{R}$$



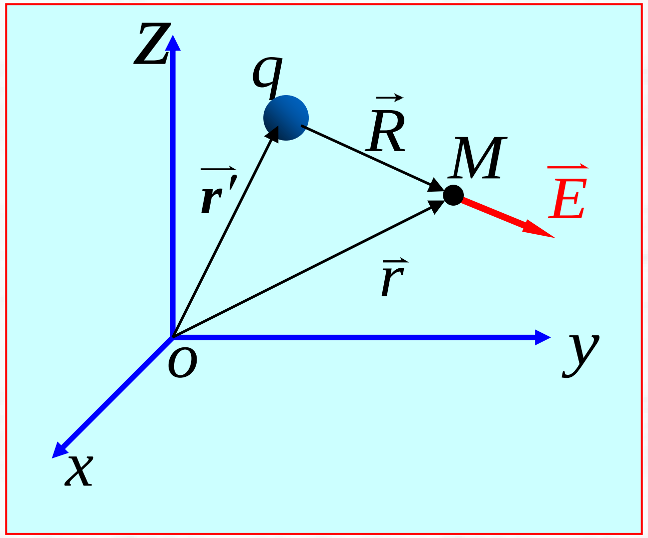
1. 库仑定律与电场强度

电场力

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_{12}^3}\vec{R}_{12}$$

电场强度

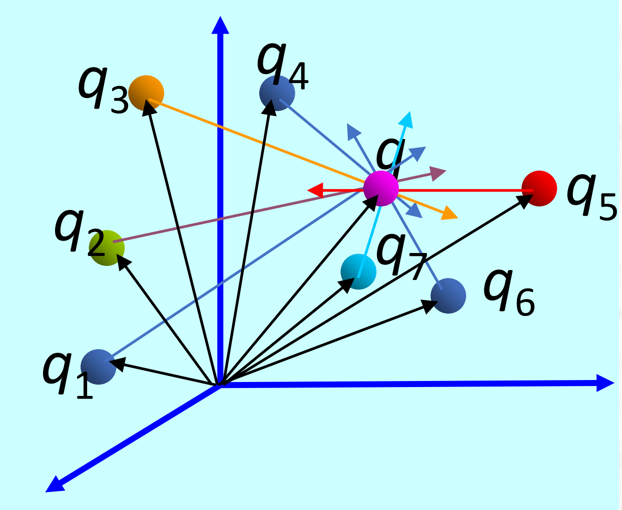
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{R}$$



多个电荷
叠加原理

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i\vec{R}_i}{R_i^3}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i\vec{R}_i}{R_i^3}$$



体电荷

$$\vec{F} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V'$$

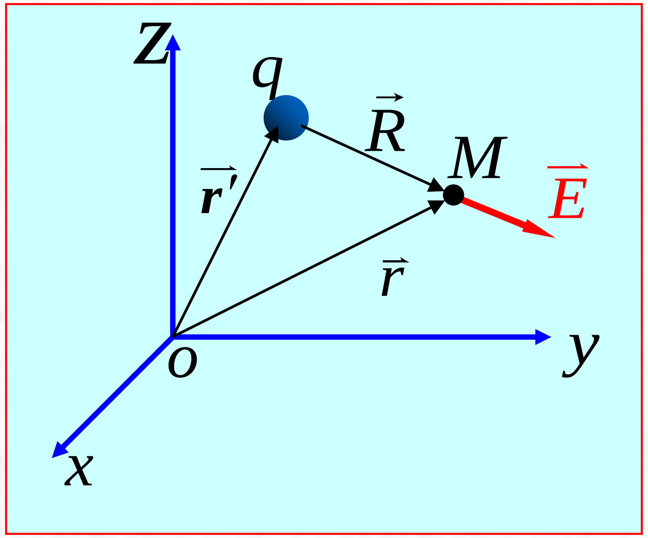
1. 库仑定律与电场强度

电场强度

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{r}')\frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V'$$ 体电荷分布

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \rho_S(\vec{r}')\frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}S'$$ 面电荷分布

$$\vec{E}(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_l \rho_l(\vec{r}')\frac{\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}l'$$ 线电荷分布



要区分源点 $\vec{r}'$ 与场点 $\vec{r}$

例2. 2. 1 （P50）

例2. 2. 2 （P51）

2. 静电场的散度

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}\mathrm{d}V'$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\frac{\vec{\boldsymbol{R}}}{R^3}$$

$$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\nabla\cdot\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'\right]$$

∇ **作用于** $\vec{\boldsymbol{r}}$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)=-4\pi\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')$$

$$\Rightarrow \nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}V'$$

$$\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\delta(\vec{\boldsymbol{r}}-\vec{\boldsymbol{r}}')\mathrm{d}V'=\rho(\vec{\boldsymbol{r}})$$

全空间积分

$$\Rightarrow \boxed{\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\frac{\rho(\vec{\boldsymbol{r}})}{\varepsilon_0}}$$

2. 静电场的散度

静电场的高斯定理

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}}$$

微分形式

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{dV}}$$

积分形式

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{dV} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{dV} \qquad \int_V \nabla \cdot \vec{\boldsymbol{E}} \mathrm{dV} = \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} \qquad \oint_S \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} \mathrm{dV}$$

2. 静电场的旋度

$$\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \nabla\times\left[-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'\right]$$

$$= -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \rho(\vec{\boldsymbol{r}}')\left[\nabla\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\right]\mathrm{d}V'$$

$$= 0$$

静电场是无旋场！

$$\boxed{\nabla\times\vec{\boldsymbol{E}} = 0}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = 0}$$

$$\int_S \nabla\times\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_C \vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

例2.2.3 （P55）

例 2.2.3 半径为 a 的球形区域内充满分布不均匀的体电荷，其体密度为 $\rho(\boldsymbol{r})$。已知电场强度矢量为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\begin{cases}\boldsymbol{e}_r(r^3+Ar^2), & r<a\\ \boldsymbol{e}_r(a^5+Aa^4)r^{-2}, & r>a\end{cases}$$

式中的 A 为常数，试求电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$。

解： 在已知电场强度的情况下，由式(2.2.14)即可求得电荷体密度 $\rho(\boldsymbol{r})$ 为

$$\rho(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$$

由于题中给定的电场强度 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 只有 E_r 分量，将 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ 在球坐标系中展开，得

$$\rho(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2E_r)$$

在 $r<a$ 的区域内

$$\rho(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2(r^3+Ar^2)]=\varepsilon_0(5r^2+4Ar)$$

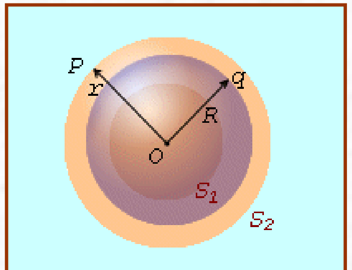
在 $r>a$ 的区域内

$$\rho(\boldsymbol{r})=\varepsilon_0\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}[r^2(a^5+Aa^4)r^{-2}]=0$$

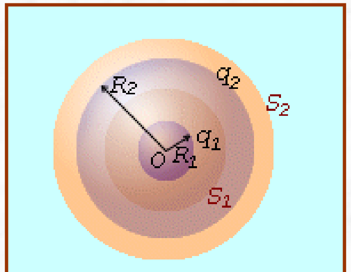
可见，体密度电荷只分布在 $r<a$ 的球形区域内，球外无电荷分布。

对称分布的场源带来对称分布的场！

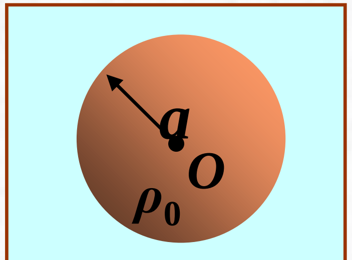
球对称分布



带电球壳

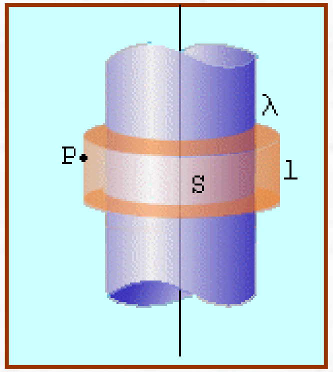


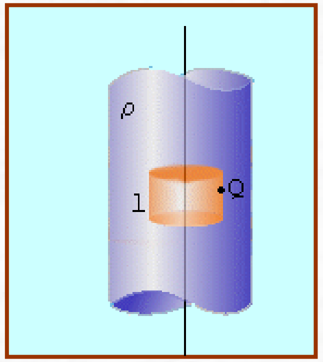
多层同心球壳



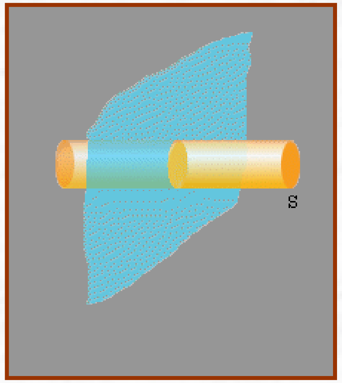
均匀球体

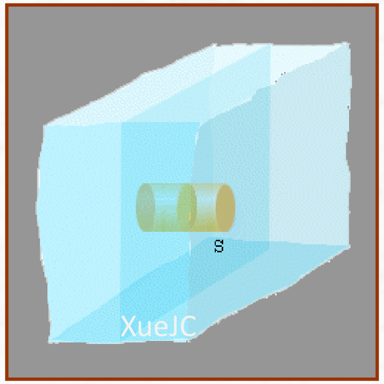
轴对称分布





无限大平面





2.3 真空中恒定磁场的基本规律

本节内容　都是重点

2.3.1 安培力定律 磁感应强度

2.3.2 恒定磁场的散度与旋度

恒定电场：恒定电流产生的磁场。

1. 安培力定律与磁感应强度

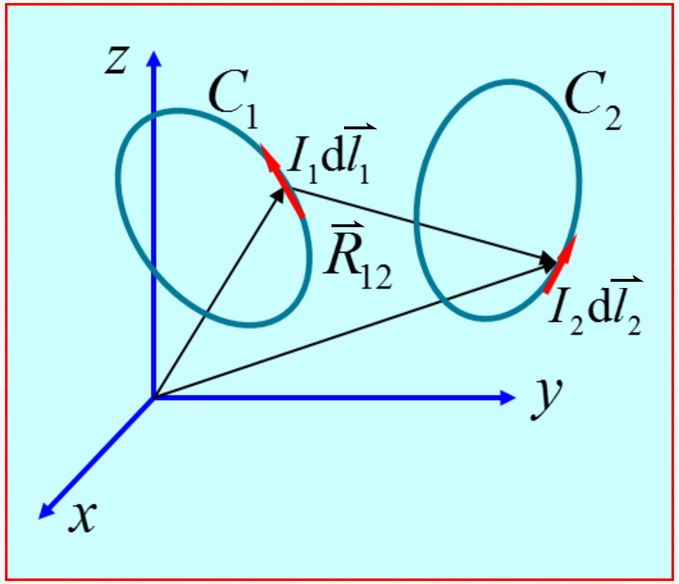
安培力定律 说明？

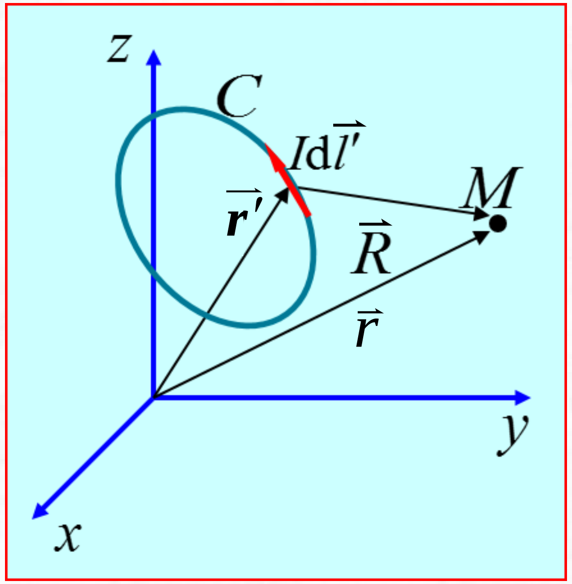
$$\vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2 \mathrm{d}\vec{l}_2 \times \left(I_1 \mathrm{d}\vec{l}_1 \times \vec{R}_{12}\right)}{R_{12}^3}$$

毕奥-萨伐尔定律 说明？

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\mathrm{d}\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}' \times \vec{R}}{R^3}$$





1. 安培力定律与磁感应强度

安培力定律

$$\vec{F}_{12}=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_2}\oint_{C_1}\frac{I_2\mathrm{d}\vec{l}_2\times\left(I_1\mathrm{d}\vec{l}_1\times\vec{R}_{12}\right)}{R_{12}^3}$$

毕奥-萨伐尔定律

$$\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{R}}{R^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}'\times\vec{R}}{R^3}$$

磁场中电流回路受力

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=\oint_C I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

电流元受力

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}}=I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}$$

$$I\mathrm{d}\vec{l}=\rho_l v\vec{e}_l\mathrm{d}l=\mathrm{d}q\vec{v}$$

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{m}}=\mathrm{d}q\vec{v}\times\vec{B}$$

洛伦兹力

$$\vec{F}_{\mathrm{m}}=q\vec{v}\times\vec{B}$$?

dq：dl 处的运动电荷量

1. 安培力定律与磁感应强度

磁感应强度

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_C \frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{R}}{R^3}}$$ **线电流**

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_S \frac{\vec{J}_S(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}S'}$$ **面电流**

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V'}$$ **体电流**

例 2.3.1　设线电流圆环的半径为 a，流过的电流为 I。计算线电流圆环轴线上任意一点的磁感应强度。

解：取线电流圆环位于 xy 平面上，并取其轴线为 z 轴，则所求场点为 $P(0,0,z)$，如图 2.3.2 所示。采用圆柱坐标系，圆环上的电流元为 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'=\boldsymbol{e}_\phi Ia\mathrm{d}\phi'$，其位置矢量为 $\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_\rho a$，而场点 P 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{e}_z z$，故得

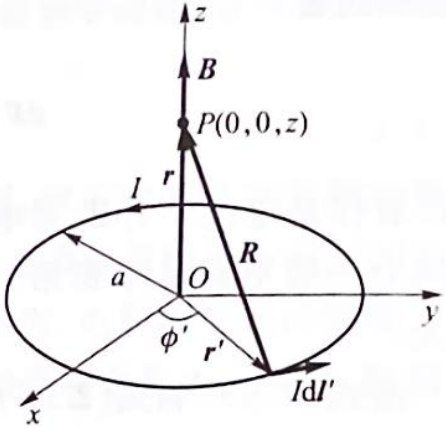


图 2.3.2　线电流圆环在轴线上产生的 $\boldsymbol{B}$

$$\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}_\rho a,\qquad |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|=(z^2+a^2)^{1/2}$$

$$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}'\times(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')=\boldsymbol{e}_\phi Ia\mathrm{d}\phi'\times(\boldsymbol{e}_z z-\boldsymbol{e}_\rho a)=\boldsymbol{e}_\rho Iaz\mathrm{d}\phi'+\boldsymbol{e}_z Ia^2\mathrm{d}\phi'$$

由式(2.3.7)，得轴线上任一点 $P(0,0,z)$ 的磁感应强度为

$$\boldsymbol{B}(z)=\frac{\mu_0 Ia}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\boldsymbol{e}_\rho z+\boldsymbol{e}_z a}{(z^2+a^2)^{3/2}}\mathrm{d}\phi'=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 Ia^2}{2(z^2+a^2)^{3/2}}$$

可见，线电流圆环轴线上的磁感应强度只有轴向分量，这是因为圆环上各对称点处的电流元在场点 P 产生的磁场强度的径向分量相互抵消。

在圆环的中心点上，$z=0$，磁感应强度最大，即

$$\boldsymbol{B}(0)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 I}{2a}$$

当场点 P 远离圆环，即 $z\gg a$ 时，因 $(z^2+a^2)^{3/2}\approx z^3$，故

$$\boldsymbol{B}(z)=\boldsymbol{e}_z\frac{\mu_0 Ia^2}{2z^3}$$

2. 恒定磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\left(\frac{1}{R}\right)\times\vec{J}(\vec{r}')\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \left[\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R} - \frac{1}{R}\nabla\times\vec{J}(\vec{r}')\right]\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'}$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')\times\vec{R}}{R^3}\mathrm{d}V'}$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\vec{R}}{R^3}$$

$$\nabla\times\left(u\vec{A}\right) = \nabla u\times\vec{A} + u\nabla\times\vec{A}$$

$$\nabla\times\left(u\vec{A}\right) - u\nabla\times\vec{A} = \nabla u\times\vec{A}$$

$$u = \frac{1}{R} \qquad \vec{A} = \vec{J}(\vec{r}')$$

∇ 作用于 $\vec{r}$

$$\nabla\times\vec{J}(\vec{r}') = 0$$

2. 恒定磁场的散度

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

磁通连续性原理

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0}$$ **微分形式**

$$\boxed{\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0}$$ **积分形式**

$$\vec{F} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{F}$$

散度定理

$$\int_V \nabla \cdot \vec{B}\mathrm{d}V = \oint_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

恒定磁场是无散场，穿过闭合曲面的通量为0。

磁感应线是闭合曲线，不存在磁单极子？

3. 恒定磁场的旋度

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r}) = \nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'}$$

$$\nabla\times\nabla\times\vec{F} = \nabla(\nabla\cdot\vec{F}) - \nabla^2\vec{F}$$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right) = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$$

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \nabla\times\nabla\times\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V \nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V' - \frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V'$$

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V \nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V' + \mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

$$\boxed{-\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V \vec{J}(\vec{r}')\nabla^2\left(\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}V' = \mu_0\int_V \vec{J}(\vec{r}')\delta(\vec{r}-\vec{r}')\mathrm{d}V' = \mu_0\vec{J}(\vec{r})}$$

3. 恒定磁场的旋度

$$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\boxed{\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'}+\mu_0\vec{J}(\vec{r})=\mu_0\vec{J}(\vec{r})$$

$$\boxed{\vec{B}(\vec{r})=\nabla\times\frac{\mu_0}{4\pi}\int_V\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'}$$

$$\nabla\cdot\left(u\vec{A}\right)=\vec{A}\cdot\nabla u+u\nabla\cdot\vec{A}$$

$$u=\frac{1}{R}\qquad\vec{A}=\vec{J}(\vec{r}')$$

$$\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}=\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla\left(\frac{1}{R}\right)+\cancel{\frac{1}{R}\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r}')}=-\vec{J}(\vec{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$=\cancel{\frac{1}{R}\nabla'\cdot\vec{J}(\vec{r}')}-\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right]=-\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right]$$

$$\nabla\cdot\vec{J}(\vec{r}')=0$$

$$\nabla\left(\frac{1}{R}\right)=-\nabla'\left(\frac{1}{R}\right)$$

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V\nabla\cdot\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\mathrm{d}V'=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\int_V\nabla'\cdot\left[\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\right]\mathrm{d}V'$$

$$=-\frac{\mu_0}{4\pi}\nabla\oint_S\frac{\vec{J}(\vec{r}')}{R}\cdot\mathrm{d}\vec{S}'=0$$

$$\int_V\nabla\cdot\vec{F}\mathrm{d}V=\oint_S\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

V'包含所有电流区域

3. 恒定磁场的旋度

$$\int_S \nabla \times \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \oint_C \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$

$$\int_S \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = \mu_0 I$$

安培环路定理

$$\boxed{\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$ 微分形式

$$\boxed{\oint_C \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I}$$ 积分形式

- 恒定电流是恒定磁场的涡旋源
- 恒定磁场的环流等于闭合曲线内电流与μ_0的乘积

恒定磁场的散度与旋度

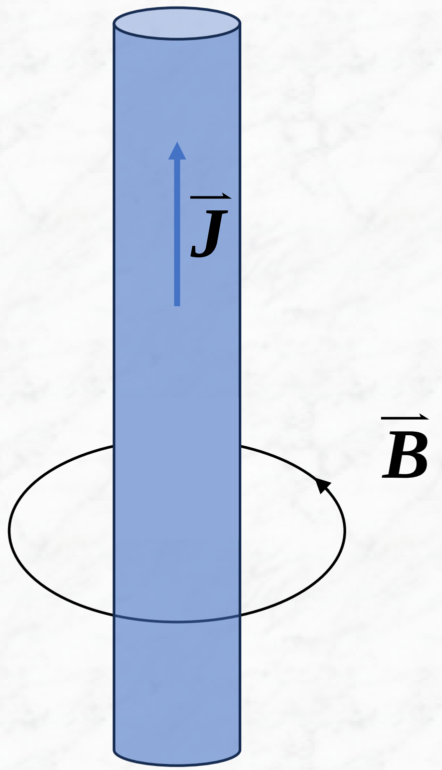
$$\boxed{\nabla \cdot \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = 0}$$

$$\boxed{\nabla \times \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = \mu_0 \vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}})}$$

$$\boxed{\oint_S \vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}} = 0}$$

$$\boxed{\oint_C \vec{\boldsymbol{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}} = \mu_0 I}$$

半径为a的无限长圆柱区域内存在均匀分布的电流I，电流方向为圆柱延伸方向，求空间中的磁感应强度。



2.4 媒质的电磁特性

本节内容 都是重点

2.4.1 电介质的极化特性

2.4.2 磁介质的磁化特性

2.4.3 导电媒质的传导特性

真空中静态电磁场的基本规律

$\nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$	散度源	$\oint_S\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\int_V\rho\mathrm{d}V$
$\nabla\times\vec{E}=0$	保守场	$\oint_C\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=0$
$\nabla\cdot\vec{B}(\vec{r})=0$	磁通连续	$\oint_S\vec{B}(\vec{r})\cdot\mathrm{d}\vec{S}=0$
$\nabla\times\vec{B}(\vec{r})=\mu_0\vec{J}(\vec{r})$	旋涡源	$\oint_C\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$

媒质与真空有何不同？　　媒质影响电磁场？

媒质的电磁特性

外加电场

媒质对电磁场的响应

- 极化 — 电介质 — 原子核与电子结合紧密 — 束缚电荷做微小位移
- 传导 — 导体 — 原子核与电子互作用力弱 — 自由电荷做定向移动
- 磁化 — 磁介质 — 电子的轨道运动与自旋形成环形电流 — 环形电流取向发生变化

外加磁场

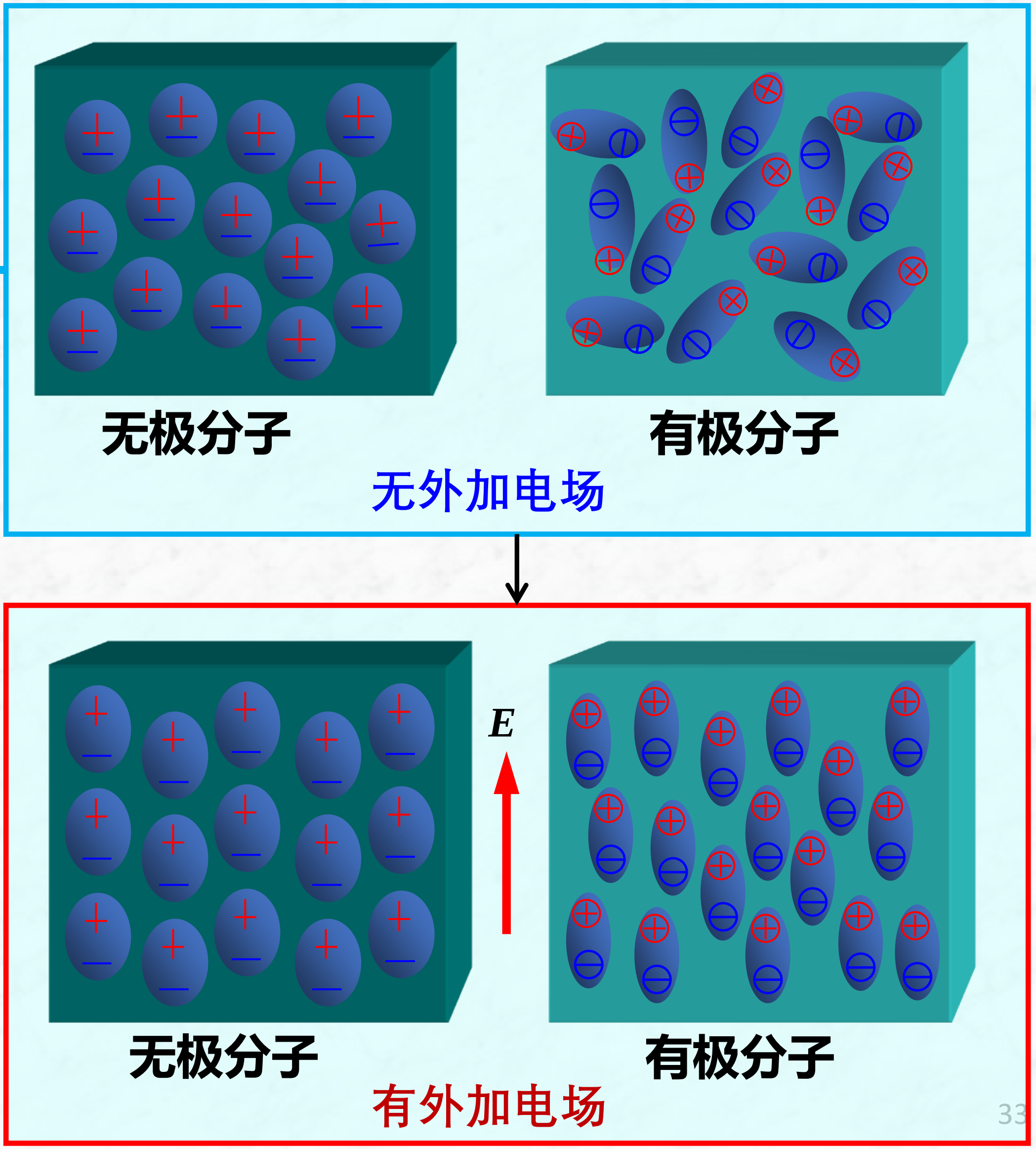
1. 电介质的极化

电介质束缚电荷的分布特征

正负电荷中心重合 → **无极分子** → 正负电荷中心错开 → 位移极化

电荷中心不重合，电偶极子 → **有极分子** → 电偶极子旋转 → 取向极化

无极/有极分子举例？



2. 极化强度

分子的电偶极矩 $\vec{p}_i = q_i \vec{l}_i$

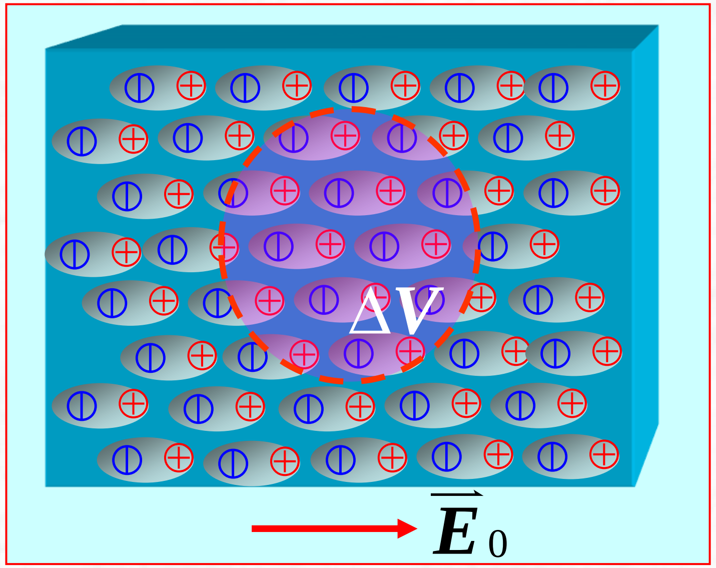
极化强度矢量

$$\boxed{\vec{P} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_i}{\Delta V}}$$

极化的程度

单位体积内电偶极矩的矢量和

电偶极子如何表示？



总电场 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$

极化强度与什么有关？又如何与总电场联系起来？

3. 极化电荷

极化所导致的电介质内部或表面的净电荷。

(1) 极化电荷体密度

穿出 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的电荷

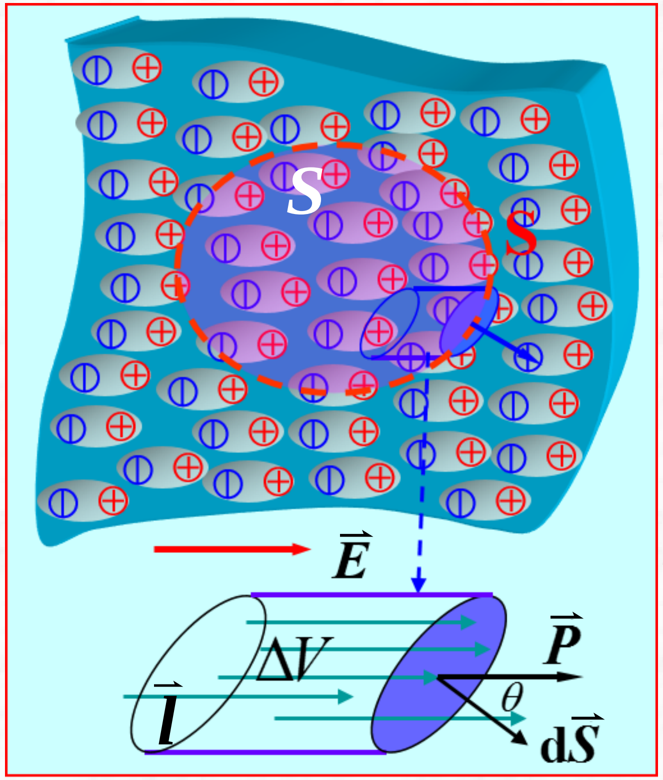
$$Nq\Delta V = Nq\vec{l}\cdot\vec{e}_{n}\mathrm{d}S = \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

闭合面S内的极化电荷量

$$q_P = -\oint_S \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V \nabla\cdot\vec{P}\mathrm{d}V$$

极化电荷体密度 $\boxed{\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}}$

均匀介质



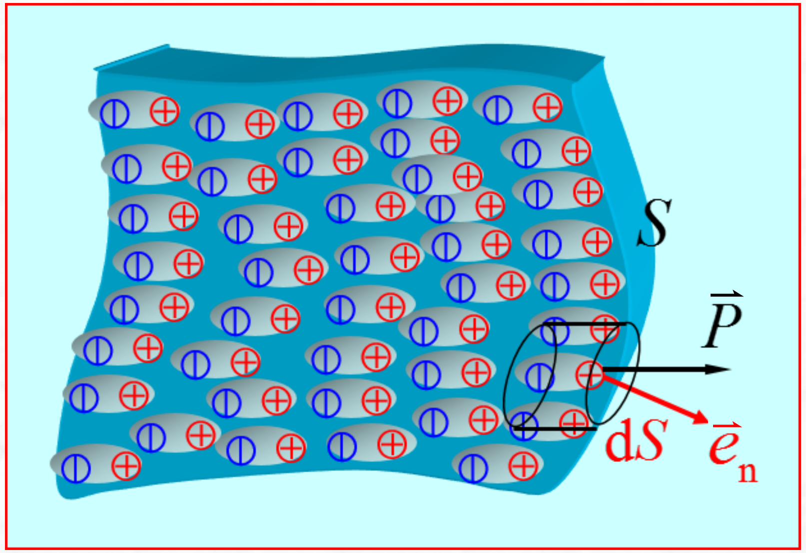
分子电偶极矩 $\vec{p} = q\vec{l}$

分子数密度 N

3. 极化电荷

极化所导致的电介质内部或表面的净电荷。

均匀介质



(2) 极化电荷面密度

穿出 $d\vec{S}$ 的电荷

$$Nq\Delta V = Nq\vec{\boldsymbol{l}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_n dS = \vec{\boldsymbol{P}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_n dS$$

穿出曲面S的极化电荷量

$$q_P = \int_S \vec{\boldsymbol{P}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_n dS$$

分子电偶极矩 $\vec{\boldsymbol{p}} = q\vec{\boldsymbol{l}}$

分子数密度 N

极化电荷面密度 $\boxed{\rho_P = \vec{\boldsymbol{P}}\cdot\vec{\boldsymbol{e}}_n}$

4. 电介质中的静电场基本方程　电场与电荷的关系？

静电场的高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}q_{总}=\frac{1}{\varepsilon_0}(q+q_P)$$

极化电荷　自由电荷

$$q_P=-\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\oint_S \varepsilon_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q-\oint_S \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\rightarrow \oint_S \left(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q \rightarrow \oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=q$$

自由电荷 $q=\int_V \rho \mathrm{d}V$

定义电位移矢量 $\boxed{\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P}}$

$$\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \nabla\cdot\vec{D}\mathrm{d}V$$

电介质中的高斯定理

积分形式 $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\int_V \rho \mathrm{d}V}$

$\boxed{\nabla\cdot\vec{D}=\rho}$ **微分形式**

4. 电介质中的静电场基本方程

电介质中

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_V \rho \mathrm{d}V$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

真空中

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho \mathrm{d}V$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

5. 电介质的本构关系

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}$$

一般情况下 $\boxed{\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}}$ χ_e：电极化率

$\vec{P}$与什么有关？

对于各项同性介质

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

相对介电常数

$$\boxed{\varepsilon_r = 1 + \chi_e}$$

无量纲

本构关系 $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \vec{E}}$

介电常数

$$\boxed{\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

对于各项异性介质

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix}$$

对于非线性介质•••

例 2.4.1 半径为 a 、介电常数为 ε 的球形电介质内的极化强度为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{e}_r\dfrac{k}{r}$，式中的 k 为常数。（1）计算极化电荷体密度和面密度；（2）计算电介质球内自由电荷体密度。

解：（1）电介质球内的极化电荷体密度为

$$\rho_P=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r^2P_r)=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{k}{r}\right)=-\frac{k}{r^2}\quad(r<a)$$

在 $r=a$ 处的极化电荷面密度为

$$\rho_{SP}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{e}_n=\boldsymbol{e}_r\frac{k}{r}\cdot\boldsymbol{e}_r\Big|_{r=a}=\frac{k}{a}$$

（2）因 $\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，故

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot(\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P})=\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}+\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\varepsilon_0\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{D}}{\varepsilon}+\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

即

$$\left(1-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{P}$$

而 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho$，故电介质球内的自由电荷体密度为

$$\rho=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\nabla\cdot\boldsymbol{P}=\frac{\varepsilon}{\varepsilon-\varepsilon_0}\frac{k}{r^2}\quad(r<a)$$

课堂作业

$$\vec{\boldsymbol{P}}=\vec{\boldsymbol{e}}_r\frac{k}{r^2}$$

1. 磁介质的磁化

电子的自旋和轨道运动形成分子电流

分子磁矩 $\boxed{\vec{p}_{\mathrm{m}} = i\Delta\vec{S}}$

磁介质：抗磁体、顺磁体、铁磁体

磁化强度矢量

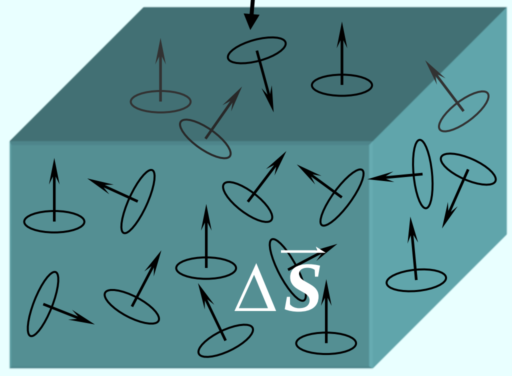
$$\boxed{\vec{M} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\sum_i \vec{p}_{\mathrm{m}i}}{\Delta V}}$$

磁化的程度

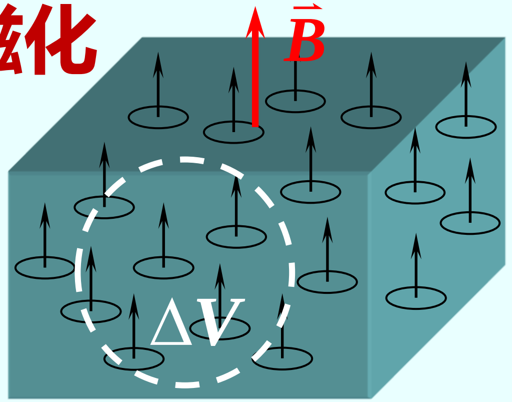
单位体积内磁偶极矩的矢量和

磁化强度如何与总磁场联系起来？

磁偶极子 ？



磁化



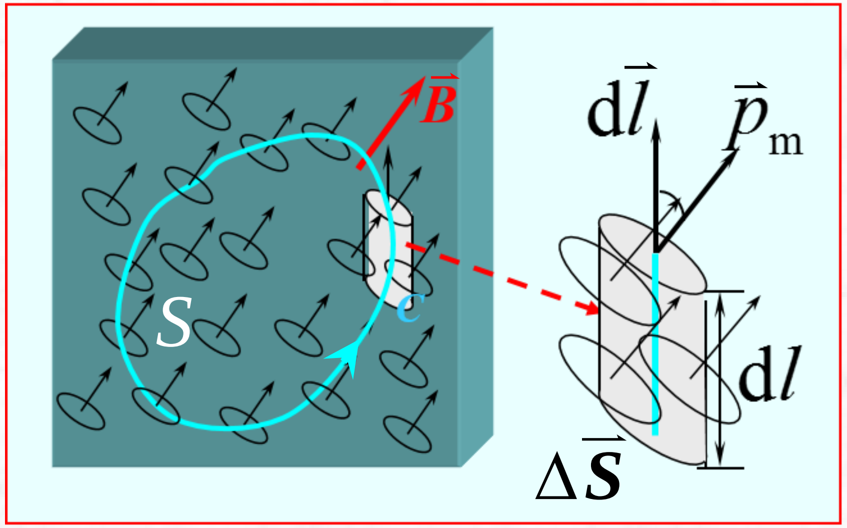
$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_{\mathrm{m}}$$

2. 磁化电流

磁化导致的内部或表面的宏观电流分布

(1) 磁化电流密度

均匀介质



与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 交链的磁化电流

$$\mathrm{d}I_M = Ni\Delta V = Ni\Delta\vec{S}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = N\vec{p}_{\mathrm{m}}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

分子数密度 N

穿过曲面S的磁化电流

$$I_M = \oint_C \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$I_M = \int_S \vec{J}_M\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

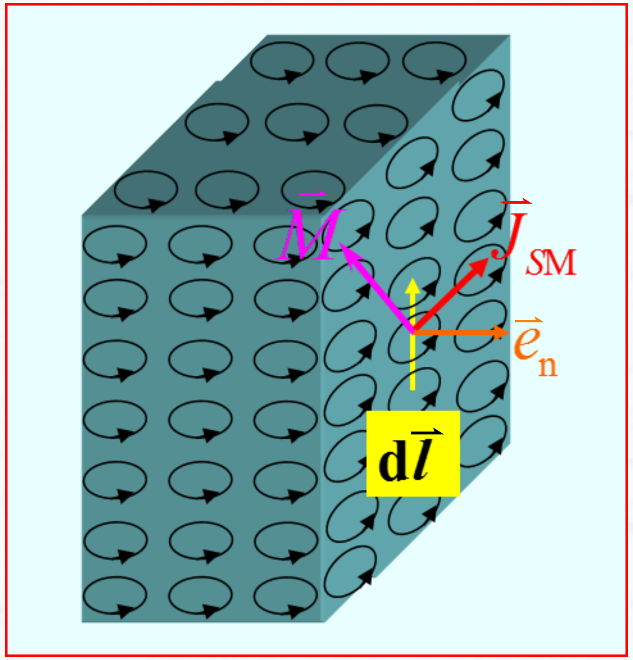
磁化电流密度 $\boxed{\vec{J}_M = \nabla\times\vec{M}}$

相对线元的积分是否会抵消？

2. 磁化电流

磁化导致的内部或表面的宏观电流分布

均匀介质



(2) 磁化电流面密度

与 $\mathrm{d}\vec{l}$ 交链的磁化电流

$$\mathrm{d}I_M = \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \vec{M}\cdot\vec{e}_l\,\mathrm{d}l = \vec{M}\cdot(\vec{e}_n\times\vec{e}_t)\,\mathrm{d}l$$

$$=(\vec{M}\times\vec{e}_n)\cdot\vec{e}_t\,\mathrm{d}l$$

分子数密度 N

$$i=\int_C \vec{J}_S(\vec{r})\cdot\vec{e}_t\,\mathrm{d}l$$

$$\vec{e}_l=\vec{e}_n\times\vec{e}_t$$

磁化电流面密度 $\boxed{\vec{J}_{SM}=\vec{M}\times\vec{e}_n}$

$\vec{e}_n$ 为磁介质表面的法向方向矢量

3. 磁介质中恒定磁场的基本方程

恒定磁场的安培环路定理

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{总} = \mu_0 (I + I_M)$$

传导电流 磁化电流

$$I_M = \oint_C \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\oint_C \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\cdot d\vec{l} = I + \oint_C \vec{M}\cdot d\vec{l}$$

$$\rightarrow \oint_C \left(\frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}\right)\cdot d\vec{l} = I \rightarrow \oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = I$$

$$I = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$$

传导电流

定义磁场强度 $\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \nabla\times\vec{H}\cdot d\vec{S}$$

电介质中的安培环路定理

积分形式 $\boxed{\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S}}$

$\boxed{\nabla\times\vec{H} = \vec{J}}$ **微分形式**

3. 磁介质中恒定磁场的基本方程

磁介质中

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{H}}=\vec{\boldsymbol{J}}$$

$$\oint_S\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=0$$

$$\oint_C\vec{\boldsymbol{H}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\int_S\vec{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}$$

真空中

$$\nabla\cdot\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=0$$

$$\nabla\times\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})=\mu_0\vec{\boldsymbol{J}}(\vec{\boldsymbol{r}})$$

$$\oint_S\vec{\boldsymbol{B}}(\vec{\boldsymbol{r}})\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=0$$

$$\oint_C\vec{\boldsymbol{B}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}=\mu_0 I$$

4. 磁介质的本构关系

$$\boxed{\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M}}$$

$\vec{M}$与什么有关？

一般情况下 $\boxed{\vec{M} = \chi_m \vec{H}}$ χ_m：磁化率

对于各项同性介质

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 (1+\chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r \vec{E}$$

本构关系 $\boxed{\vec{B} = \mu \vec{H}}$

相对磁导率

$$\boxed{\mu_r = 1 + \chi_m}$$

无量纲

磁导率

$$\boxed{\mu = \mu_0 \mu_r}$$

对于各项异性介质

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix}$$

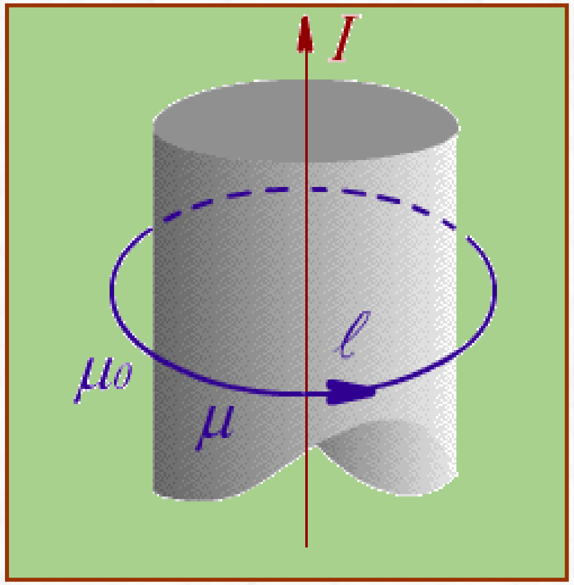
对于非线性介质•••

例题 有一磁导率为 μ，半径为 a 的无限长导磁圆柱，其轴线处有无限长的线电流 I，圆柱外是空气（μ_0），试求圆柱内外的 $\vec{B}$、$\vec{H}$ 和 $\vec{M}$ 的分布。

安培环路定理 $\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho H_\phi = I$

$$\vec{H} = \vec{e}_\phi \frac{I}{2\pi\rho} \quad 0<\rho<\infty$$

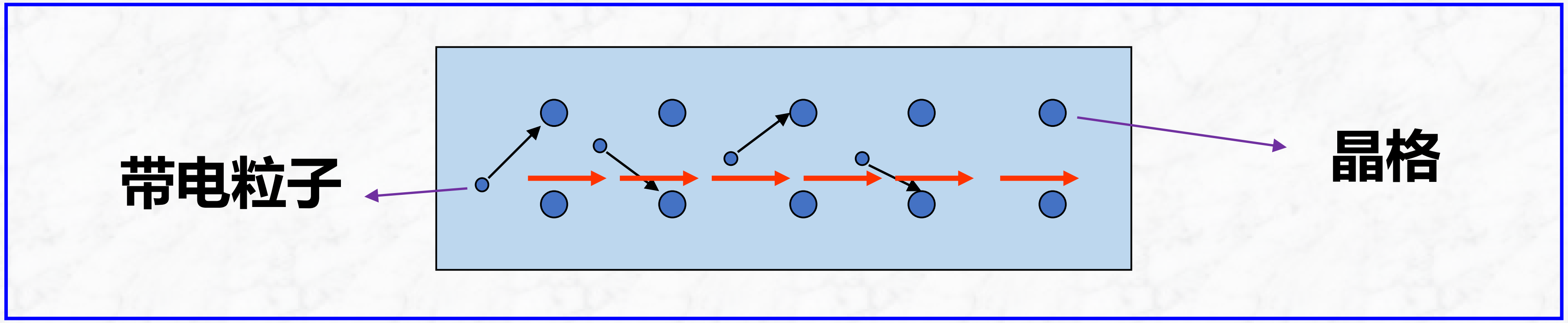
$$\vec{B} = \mu\vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \dfrac{\mu I}{2\pi\rho} & 0<\rho<a \\ \vec{e}_\phi \dfrac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & a<\rho<\infty \end{cases}$$



$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \begin{cases} \vec{e}_\phi \dfrac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\cdot\dfrac{I}{2\pi\rho} & \rho<a \\ 0 & a<\rho<\infty \end{cases}$$

媒质的传导特性

导电媒质 可自由运动的带电粒子 $\xrightarrow{\text{外电场}}$ 宏观定向运动



- 线性的各向同性电介质中

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$ 欧姆定律的微分形式

电导率 σ （单位：S/m）

媒质的传导特性

- 线性的各向同性电介质中

$$\boxed{\vec{J} = \sigma \vec{E}}$$

- 导电媒质内单位体积的损耗功率

$$\boxed{p_{\mathrm{L}} = \vec{J} \cdot \vec{E}}$$ 焦耳定律的微分形式

- 体积V内导电媒质消耗功率

$$\boxed{P_{\mathrm{L}} = \int_V \vec{J} \cdot \vec{E} \mathrm{d}V = \int_V \sigma E^2 \mathrm{d}V}$$ 焦耳定律的积分形式

媒质的电磁特性

媒质对电磁场的响应

- **极化**　$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$　　介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$
- **传导**　$\vec{B} = \mu \vec{H}$　　磁导率 $\mu = \mu_0 \mu_r$
- **磁化**　$\vec{J} = \sigma \vec{E}$　　电导率 σ

恒定电磁场

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \end{cases} \xrightarrow{\text{媒质}} \begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J} \end{cases}$$

放之四海而皆准？

2.5 电磁感应定律和位移电流

本节内容 都是重点

2.5.1 法拉第电磁感应定律

2.5.2 位移电流

- 电磁感应定律 —— 揭示时变磁场产生电场。
- 位移电流 —— 揭示时变电场产生磁场。
- 重要结论： 在时变情况下，电场与磁场相互激励。

1. 法拉第电磁感应定律

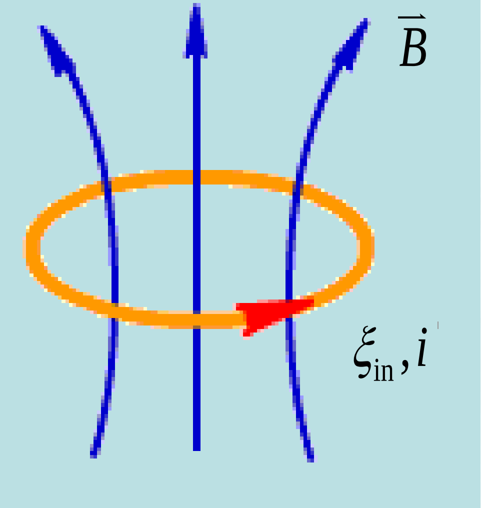
磁通量变化 ⟶ 感应电动势、感应电流

阻碍磁通量变化

$$\xi_{\text{in}} = \oint_C \vec{E}_{\text{in}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

感应电场： $\vec{E}_{\text{in}}$ **有旋**

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



库伦电场： $\vec{E}_{\text{C}}$ **无旋**

$$\xi_{\text{C}} = \oint_C \vec{E}_{\text{C}} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

感应电动势

$$\boxed{\xi_{\text{in}} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

空间中总电场

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{C}}}$$

法拉第电磁感应定律

$$\boxed{\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}} \qquad \boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

重要应用？电动机、发电机、变压器等

$$\oint_C \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

考虑回路在恒定磁场中运动

例2.5.1

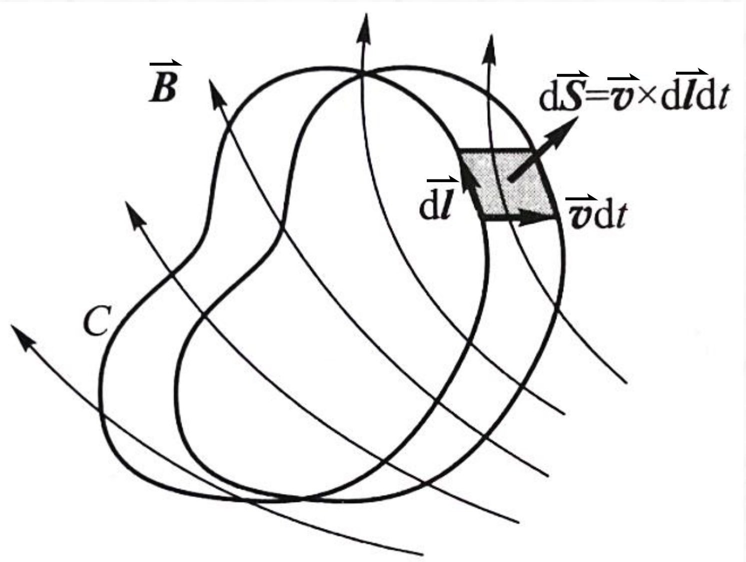
$\mathrm{d}\vec{l}$ **带来磁通变化** $\vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \vec{B}\cdot\left(\vec{v}\times \mathrm{d}\vec{l}\right)\mathrm{d}t = -\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,\mathrm{d}t$

$$\xi_{\text{in}} = \oint_C \vec{E}_{\text{in}}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

回路运动带来 $\mathrm{d}\Phi = -\oint_C\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}\,\mathrm{d}t$

感应电动势 $\xi_{\text{in}} = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \oint_C\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ 能量来源？

$$\Rightarrow \boxed{\oint_C \vec{E}'\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \oint_C\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$



当回路在时变磁场中运动

$$\oint_C \vec{E}'\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \oint_C\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\nabla\times\vec{E}' = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \nabla\times\left(\vec{v}\times\vec{B}\right)$$

法拉第电磁感应定律的一般形式

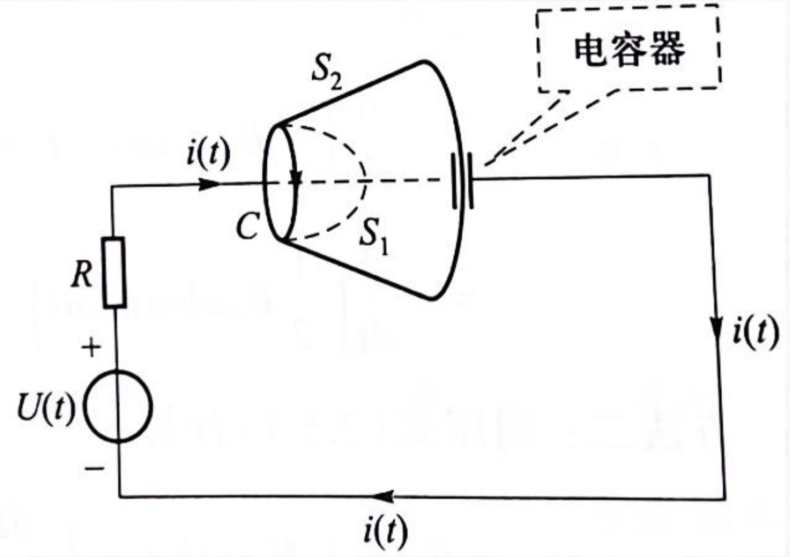
2. 位移电流

磁场 VS 电流 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}$ ➡ $\nabla\cdot\vec{J}=\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=0$ **恒定磁场**

电流 VS 电荷 $\nabla\cdot\vec{J}+\dfrac{\partial\rho}{\partial t}=0$ ➡ $\nabla\cdot\vec{J}=-\dfrac{\partial\rho}{\partial t}\neq 0$ **电荷分布变化**

出现矛盾！

电荷 VS 电场 $\nabla\cdot\vec{D}=\rho$



非恒定电流

存在

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla\times\vec{H}&=\vec{J}+\vec{J}_{\mathrm{d}}\\ \vec{J}_{\mathrm{d}}&=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\end{aligned}}$$

位移电流

有 $\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{H}\right)=\nabla\cdot\left(\vec{J}+\vec{J}_{\mathrm{d}}\right)=0$

时变电场产生磁场！

安培环路定理 $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ ➡ $\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ 微分形式

位移电流密度 $\boxed{\vec{J}_{\mathrm{d}} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$ $\boxed{\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$ 积分形式

传导电流 VS 位移电流？

传导电流：电荷运动

位移电流：电场变化

	传导电流	位移电流
绝缘介质	✘	✔
理想导体	✔	✘
一般介质	✔	✔

例1 某真空区域的磁场强度为 $\vec{H}=\vec{e}_x H_m \sin(\omega t - kz)$，**式中的** k **为常数。试求：位移电流密度和电场强度。**

解：真空中传导电流密度为0，故 $\nabla\times\vec{H}=\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$，**可得**

$$\vec{J}_d=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}=\nabla\times\vec{H}=\begin{vmatrix}\vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ H_x & 0 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\vec{e}_y\frac{\partial H_x}{\partial z}=\vec{e}_y\frac{\partial}{\partial z}\left[H_m\sin(\omega t-kz)\right]$$

$$=-\vec{e}_y kH_m\cos(\omega t-kz)$$

$$\vec{E}=\frac{\vec{D}}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\left[-\vec{e}_y kH_m\cos(\omega t-kz)\right]\mathrm{d}t$$

$$=-\vec{e}_y\frac{k}{\omega\varepsilon_0}H_m\sin(\omega t-kz)+\vec{E}_0$$

$\vec{E}_0$ **为** $t=0$ **时刻的电场强度。**

静态电磁场 → 媒质 → → 动态 → **任意电磁场**

$$\begin{cases} \nabla\cdot\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0} \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{J} \end{cases} \xrightarrow{\text{媒质}} \begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=0 \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J} \end{cases} \xrightarrow{\text{动态}} \boxed{\begin{cases} \nabla\cdot\vec{D}=\rho \\ \nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t} \\ \nabla\cdot\vec{B}=0 \\ \nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t} \end{cases}}$$

本构关系

$$\boxed{\vec{D}=\varepsilon\vec{E} \qquad \vec{B}=\mu\vec{H} \qquad \vec{J}=\sigma\vec{E}}$$

2.6 麦克斯韦方程组

本节内容　都是重点

2.6.1 麦克斯韦方程组的积分形式

2.6.2 麦克斯韦方程组的微分形式

2.6.3 媒质的本构关系

2.6.3 准静态电磁场

例2.6.1

E改H，求其他场量

麦克斯韦方程组

各个方程的意义？

微分形式		积分形式
$\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}$	磁变生电	$\oint_C\vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\dfrac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$
$\nabla\times\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$	电变生磁	$\oint_C\vec{E}\cdot d\vec{l}=-\dfrac{d}{dt}\int_S\vec{B}\cdot d\vec{S}$
$\nabla\cdot\vec{B}=0$	磁通连续	$\oint_S\vec{B}\cdot d\vec{S}=0$
$\nabla\cdot\vec{D}=\rho$	散聚于荷	$\oint_S\vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V\rho dV$

线性各向同性媒质的本构关系：

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}\qquad\vec{B}=\mu\vec{H}\qquad\vec{J}=\sigma\vec{E}$$

2.7 电磁场的边界条件

本节内容 都是重点

2.7.1 边界条件的一般形式

2.7.2 理想导体表面上的边界条件

2.7.3 理想介质分界面上的边界条件

用麦克斯韦方程组解决实际问题的重要工具

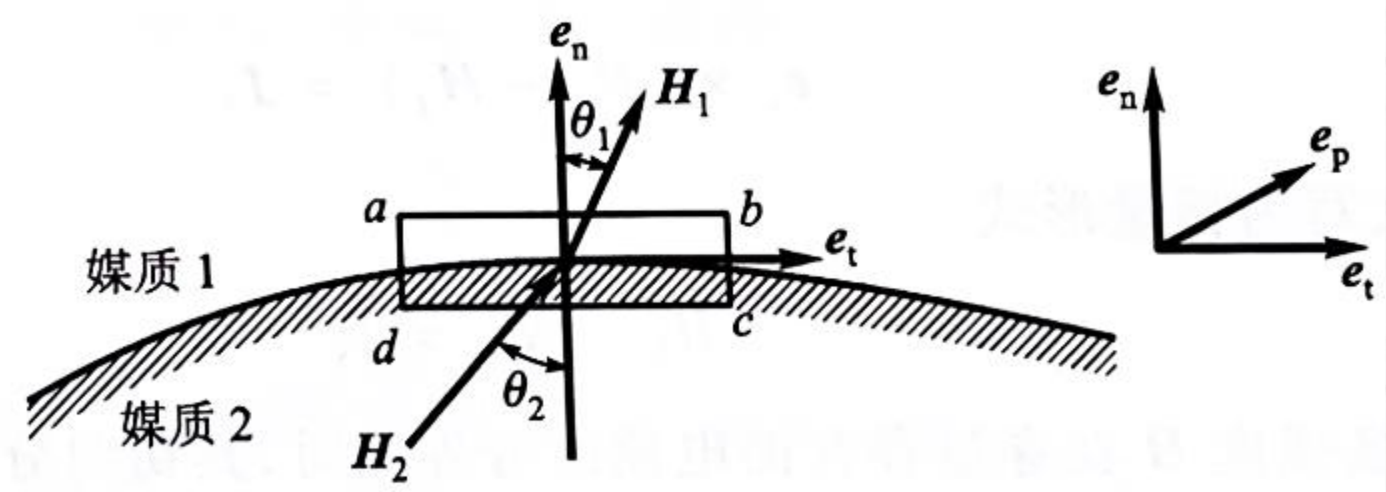
1. 磁场强度 $\vec{H}$ 的边界条件

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{H}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

令 $bc = da = \Delta h \to 0$ $\quad \boxed{\vec{ab} = -\vec{cd} = \vec{e}_t \Delta l}$



$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{H}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{H}\cdot d\vec{l}$$

$$= \lim_{\Delta h\to 0}\left[\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\right]$$

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_S \vec{J}\cdot d\vec{S} = \Delta I = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{e}_p dl$$

面电流密度 $\quad d\vec{S}$的方向矢量

$$\lim_{\Delta h\to 0}\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad \Delta h \to 0 \Rightarrow \Delta S \to 0$$

$$\boxed{\int_{\Delta l}\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\cdot \vec{e}_t dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{e}_p dl}$$

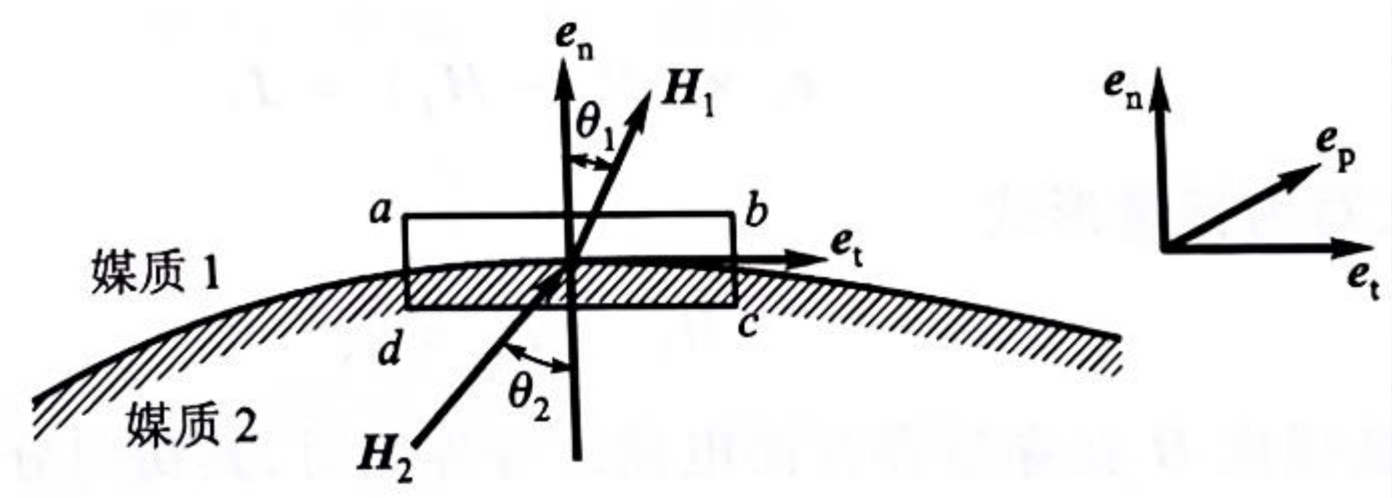
1. 磁场强度 $\vec{H}$ 的边界条件

$$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

$$\int_{\Delta l}\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\cdot \vec{e}_t dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{e}_P dl$$

将 $\vec{e}_t = \vec{e}_P \times \vec{e}_n$ 代入上式

$$\int_{\Delta l}\left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\cdot (\vec{e}_P \times \vec{e}_n) dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{e}_P dl$$



由 $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = (\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}$

$$\int_{\Delta l}\left[\vec{e}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right)\right]\cdot \vec{e}_P dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_S \cdot \vec{e}_P dl$$

$$\vec{e}_n \times \left(\vec{H}_1 - \vec{H}_2\right) = \vec{J}_S$$ 磁场强度的边界条件

$$H_{1t} - H_{2t} = J_S$$ 磁场强度切向分量的差值等于面电流密度

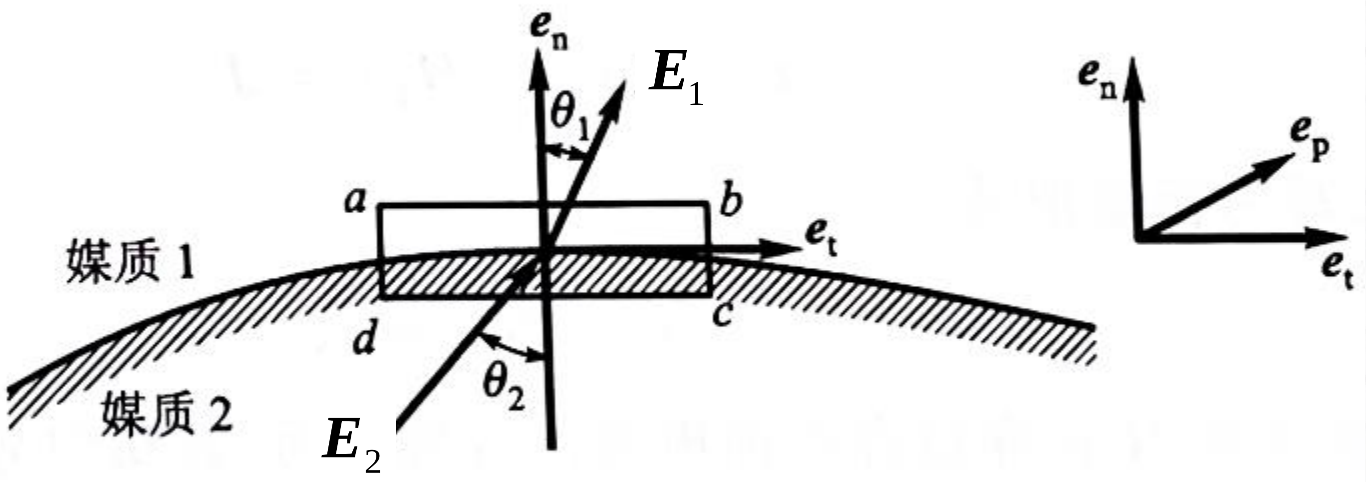
2. 电场强度 $\vec{E}$ 的边界条件

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_b^c \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_d^a \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

令 $bc = da = \Delta h \to 0$ $\quad \boxed{\vec{ab} = -\vec{cd} = \vec{e}_t \Delta l}$



$$\boxed{\begin{aligned}\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l} &= \int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_c^d \vec{E}\cdot d\vec{l} \\ &= -\lim_{\Delta h\to 0}\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\int_{\Delta l}\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\cdot \vec{e}_t\, dl = 0}$$

$$\boxed{\left(\vec{E}_1 - \vec{E}_2\right)\cdot \vec{e}_t = 0}$$

电场强度的边界条件

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

电场强度切向分量连续

3. 电场强度 $\vec{B}$ 的边界条件

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

$$\oint_S \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{顶面} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \int_{底面} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S} + \boxed{\int_{侧面} \vec{B}\cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$

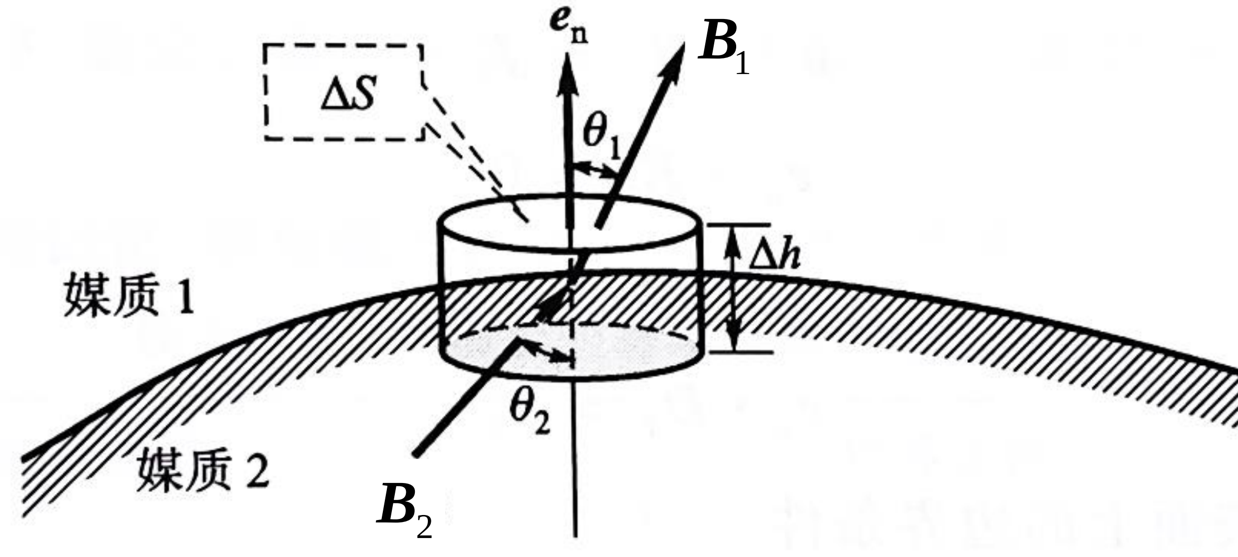
$$= \int_{\Delta S} \vec{B}_1 \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S - \int_{\Delta S} \vec{B}_2 \cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S = 0$$

$\Delta h \to 0 \Rightarrow$ **侧面面积趋于0**

$$\boxed{\int_{\Delta S} \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right)\cdot \vec{e}_n \mathrm{d}S = 0}$$

$$\boxed{\vec{e}_n \cdot \left(\vec{B}_1 - \vec{B}_2\right) = 0}$$

$$\boxed{B_{1n} = B_{2n}}$$



磁感应强度法向分量连续

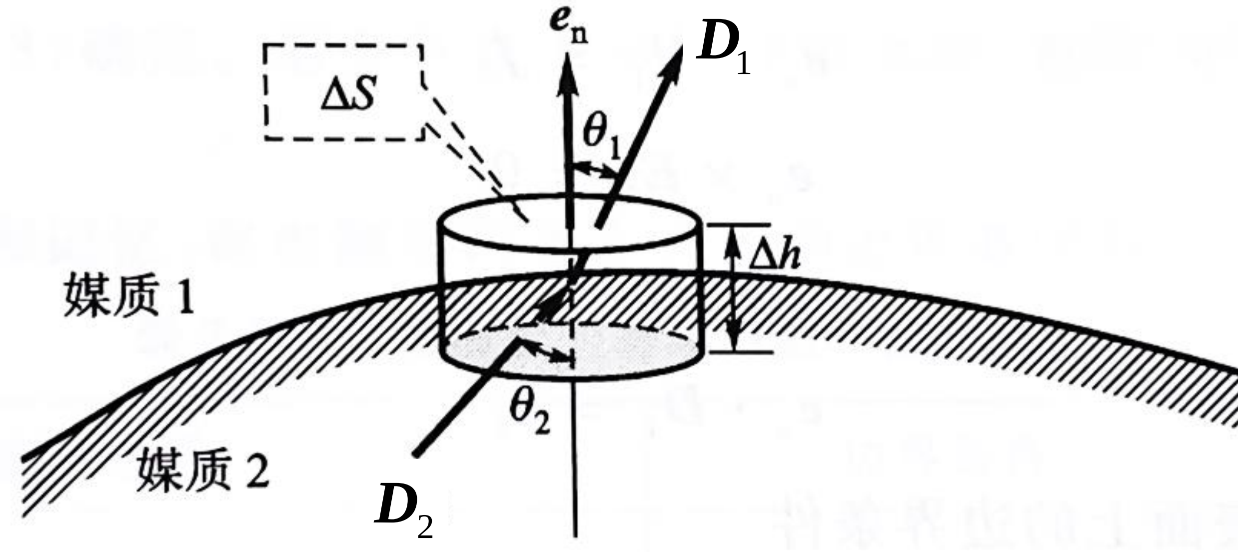
4. 电场强度 $\vec{D}$ 的边界条件

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_V \rho dV = q$$

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = \int_{顶面} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \int_{底面} \vec{D}\cdot d\vec{S} + \boxed{\int_{侧面} \vec{D}\cdot d\vec{S}}$$

$$= \int_{\Delta S} \vec{D}_1 \cdot \vec{e}_n dS - \int_{\Delta S} \vec{D}_2 \cdot \vec{e}_n dS = \int_{\Delta S} \rho_S dS$$

ρ_S 电荷面密度



$$\boxed{\int_{\Delta S} \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right)\cdot \vec{e}_n dS = \int_{\Delta S} \rho_S dS}$$

$$\boxed{\vec{e}_n \cdot \left(\vec{D}_1 - \vec{D}_2\right) = \rho_S}$$

$$\boxed{D_{1n} - D_{2n} = \rho_S}$$

电位移矢量法向分量的差值等于电荷面密度

电磁场边界条件

理想导体边界？ 理想介质边界？

麦克斯韦方程组		边界条件
$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{l}=\int_S\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$	$\longrightarrow$	$\vec{e}_n\times(\vec{H}_1-\vec{H}_2)=\vec{J}_S$
$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{l}=-\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$	$\longrightarrow$	$\vec{e}_n\times(\vec{E}_1-\vec{E}_2)=0$
$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0$	$\longrightarrow$	$\vec{e}_n\cdot(\vec{B}_1-\vec{B}_2)=0$
$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S}=\int_V \rho dV$	$\longrightarrow$	$\vec{e}_n\cdot(\vec{D}_1-\vec{D}_2)=\rho_S$

表2.7.1 重要！