机械类专业本科生课程《机器人运动学和动力学》

第二章 刚体位姿描述与空间变换

宋冬冬

Email：sdd1213@nwafu.edu.cn

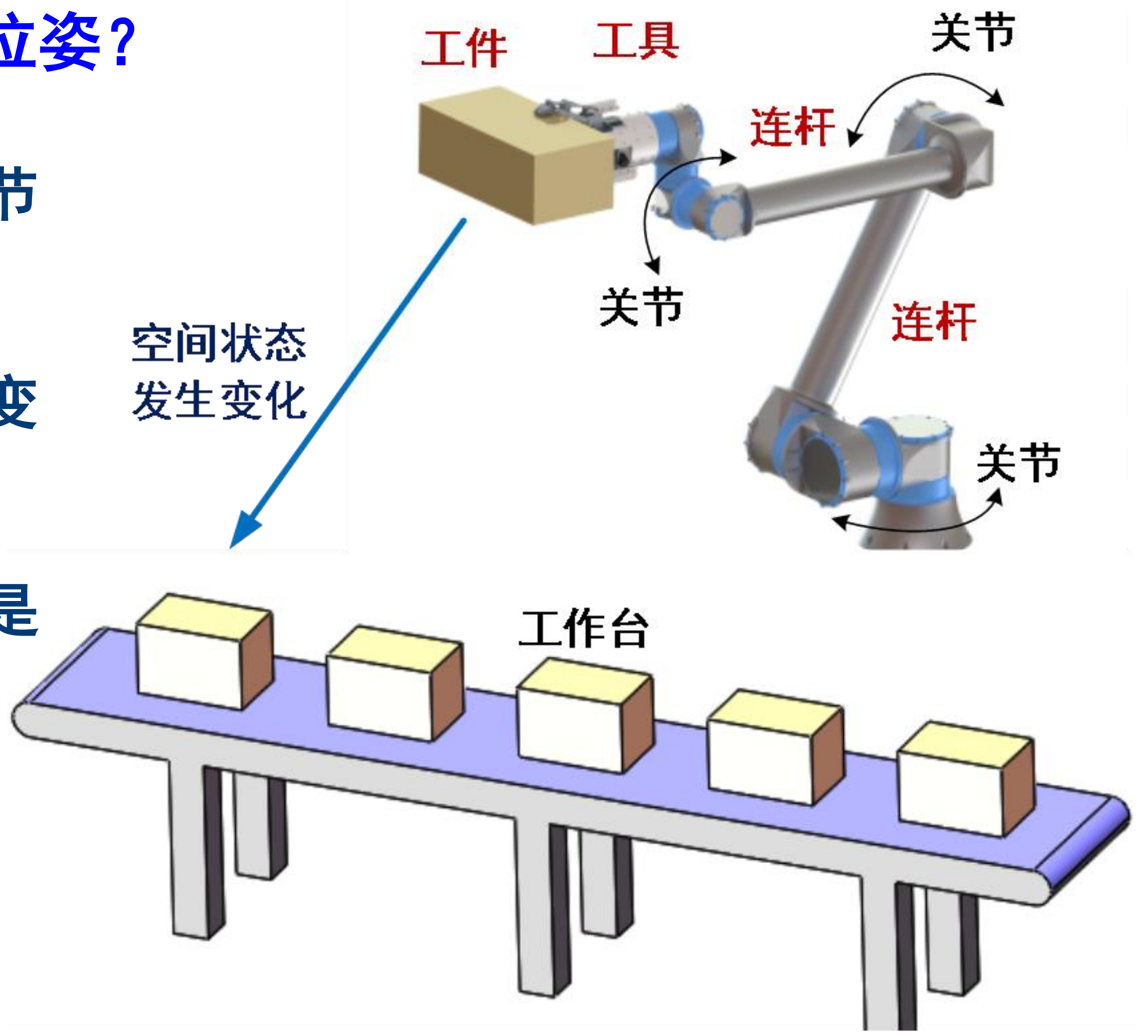
15319486313

2023年11月12日

问题导入

■ **为什么要研究刚体的空间位姿？**

- 机器人是由多个杆件和关节组成的**多刚体系统**
- 作业中通过关节的运动改变**各刚体在空间中的状态**
- 刚体在空间中状态的描述是**机器人学的基础**



主要内容

1 刚体位姿的定义

2 姿态矩阵表示法

3 姿态角表示法

4 轴-角及单元四位数表示法

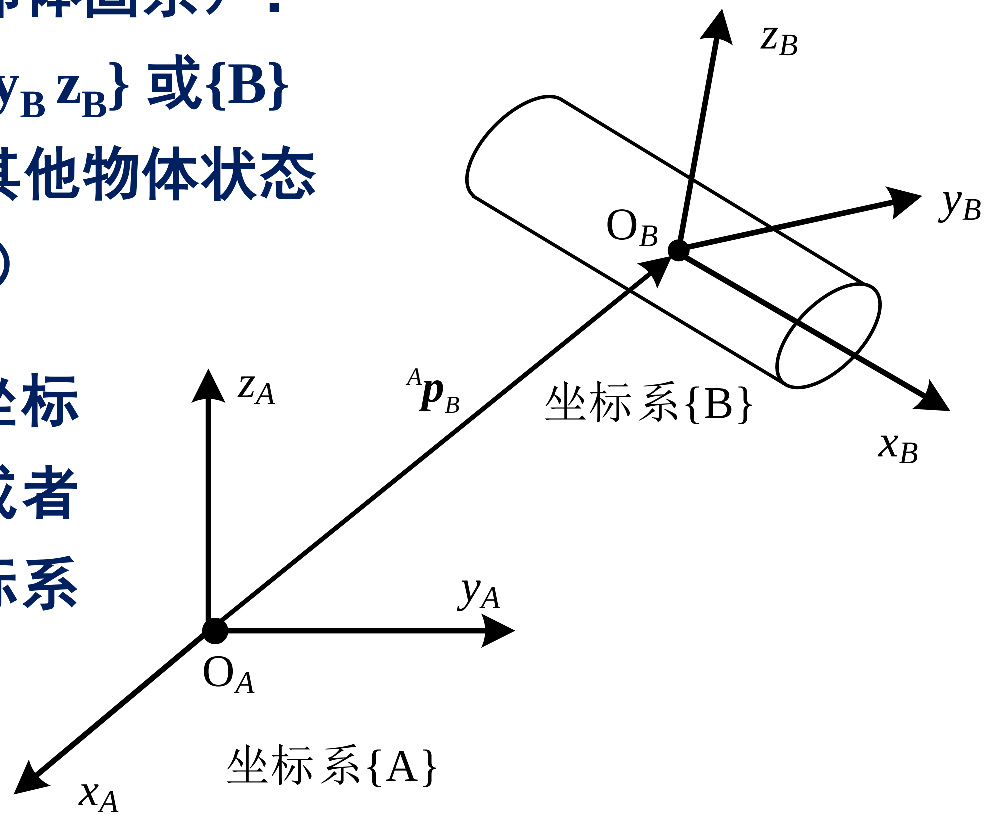
5 齐次坐标及齐次变换

2.1.1 坐标系定义

■ 描述位姿涉及的坐标系

➢**刚体坐标系**（刚体固连坐标系，即体固系）：与刚体固连、随刚体运动，记$\{x_B\ y_B\ z_B\}$ 或{B}

➢**参考坐标系**：用来做参照以描述其他物体状态的坐标系$\{x_A\ y_A\ z_A\}$（也可记为{A}）



● **刚体的位置和姿态即转为**刚体坐标系相对于参考坐标系的关系，或者在参考坐标系中描述的刚体坐标系的状态

✓ **原点的位置**——刚体的位置

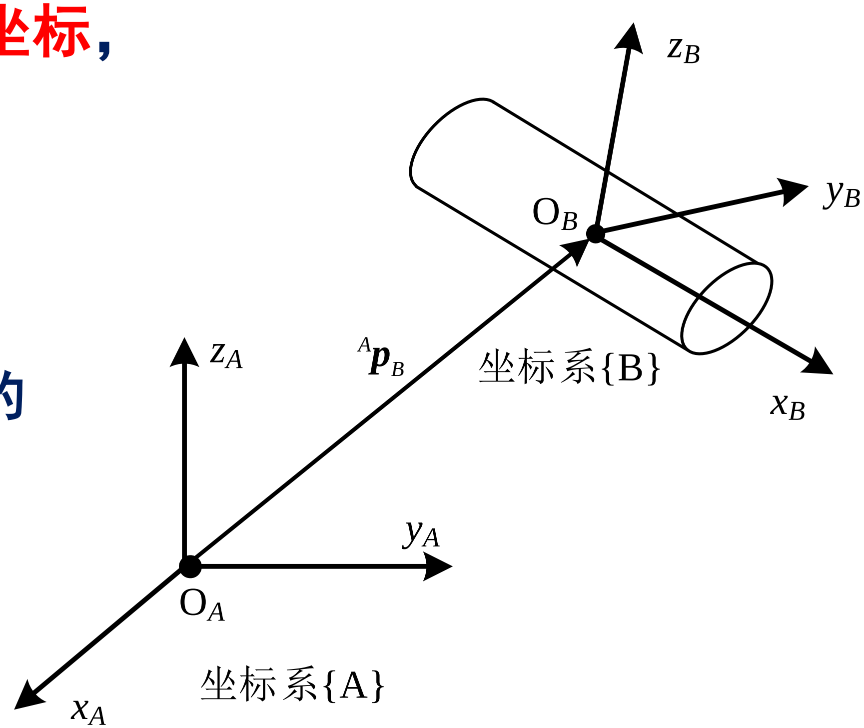
✓ **各轴的指向**——刚体的姿态

2.1.2 刚体位置和姿态的定义

■ 刚体的位置（Position）

➤ 刚体坐标系**原点在参考坐标系中的坐标**，用位置矢量p表示

$$^{A}\boldsymbol{p} = p_x\vec{\boldsymbol{i}} + p_y\vec{\boldsymbol{j}} + p_z\vec{\boldsymbol{k}}$$



■ 刚体的姿态（Attitude）

➤ 刚体坐标系**各轴指向在参考坐标系中**的表示（表示方法有多种）

■ 刚体的位姿（Pose）

➤ 刚体位置和姿态的合称

习惯性表述	① 坐标系{B}相对于{A}的位置/姿态/位姿
	② 从坐标系{A}到{B}的平移/旋转/齐次变换

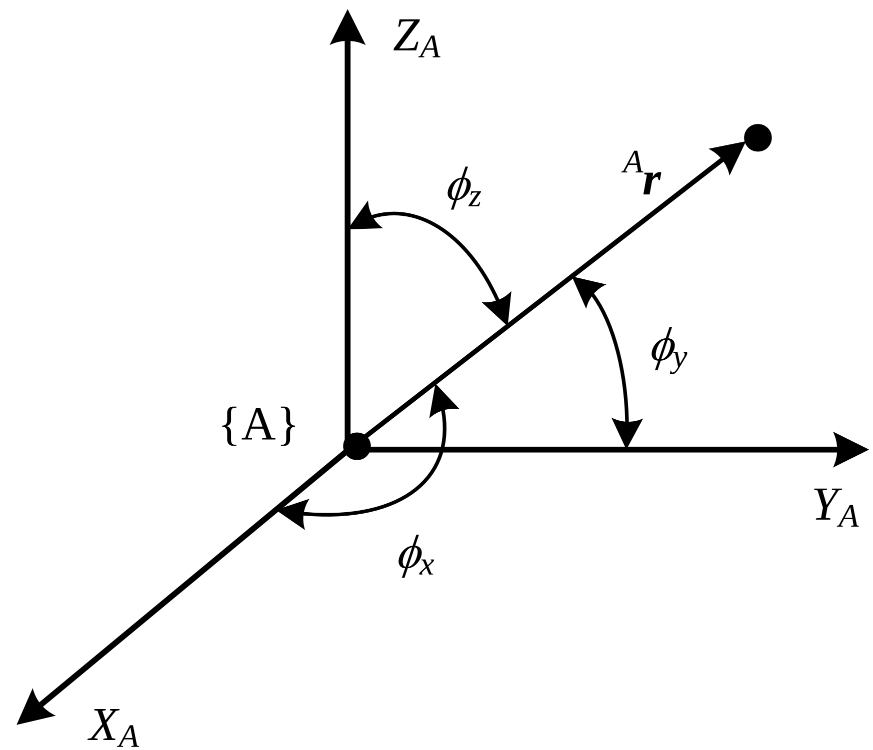
■ 矢量*r*的方向余弦

$$ {}^{A}\boldsymbol{r}_v = \left[\cos\phi_x, \cos\phi_y, \cos\phi_z\right]^{\mathrm{T}} $$

满足

$$ \cos^2\phi_x + \cos^2\phi_y + \cos^2\phi_z = 1 $$

称r_v为r的方向余弦矢量，简称方向余弦，为单位矢量，用于表示矢量的指向。



- 坐标轴指向一般用单位矢量${}^{A}\boldsymbol{x}_B$、${}^{A}\boldsymbol{y}_B$、${}^{A}\boldsymbol{z}_B$
- 考虑前进方向、运动平面时用${}^{A}\boldsymbol{n}_B$、${}^{A}\boldsymbol{o}_B$、${}^{A}\boldsymbol{a}_B$

2.1.4 刚体姿态的表示方法

■ **刚体的姿态：刚体坐标系三轴的指向**

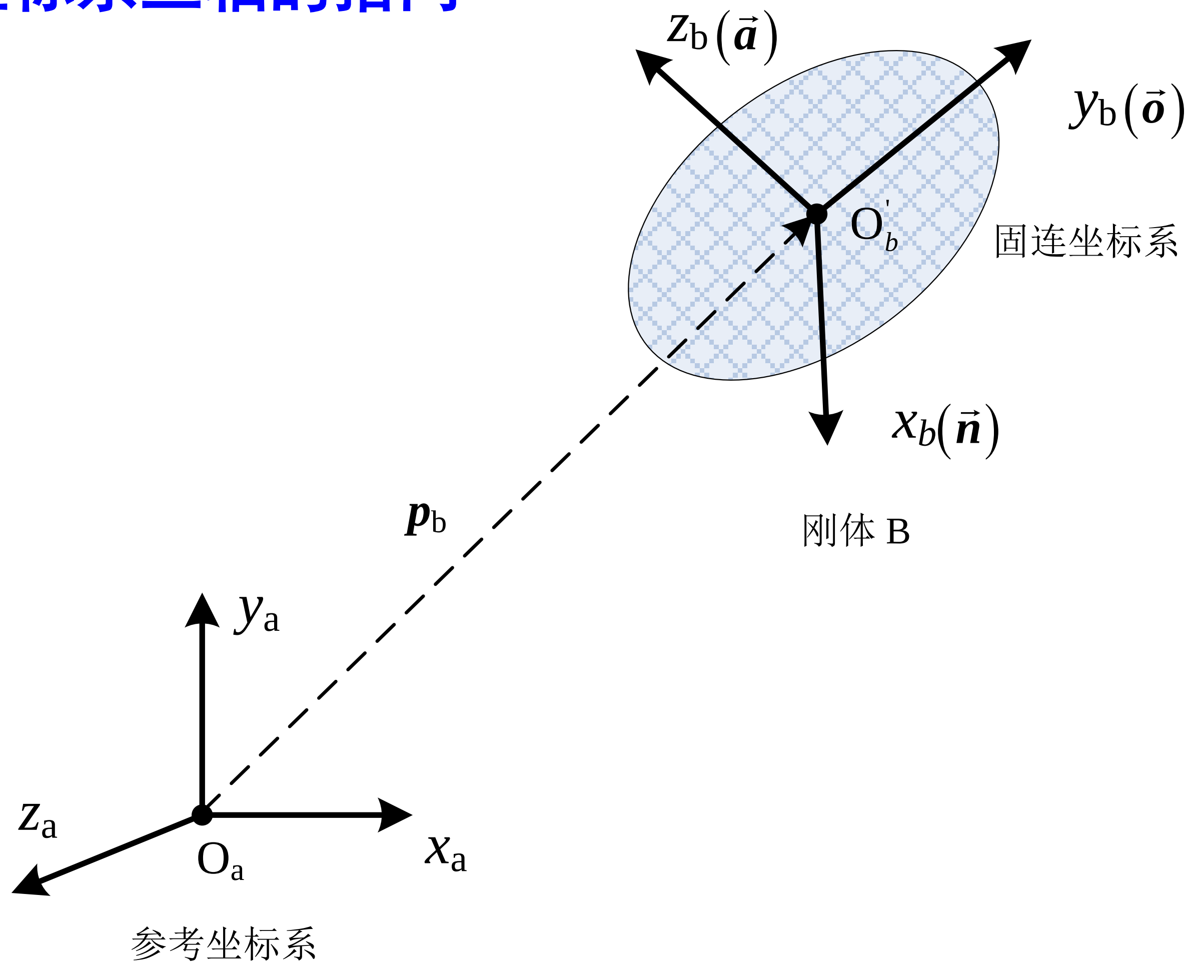
➢ 常用的表示方法

✓ 姿态矩阵表示法

✓ 姿态角表示法

✓ 轴-角表示法

✓ 单位四元数表示法



6/76

主要内容

1 刚体位姿的定义

2 姿态矩阵表示法

3 姿态角表示法

4 轴-角及单元四位数表示法

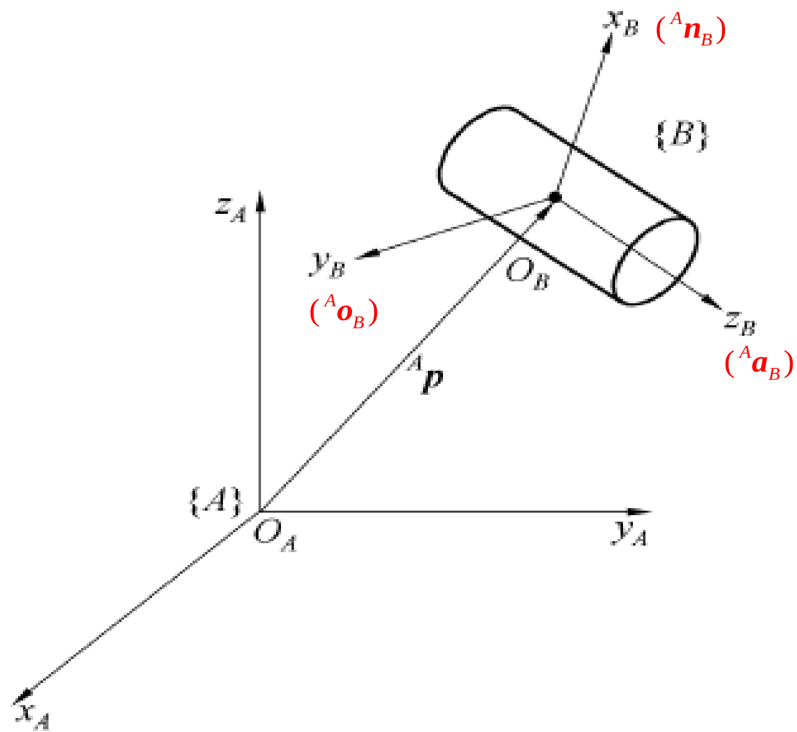
5 齐次坐标及齐次变换

2.2.1 姿态矩阵构建思路

◆ 三轴方向矢量构建矩阵 → 姿态矩阵

➢ 三轴方向矢量表示为

$$ {}^{A}\boldsymbol{n}_B = \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix},\quad {}^{A}\boldsymbol{o}_B = \begin{bmatrix} o_x \\ o_y \\ o_z \end{bmatrix},\quad {}^{A}\boldsymbol{a}_B = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} $$



满足
$$ \begin{cases} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \\ o_x^2 + o_y^2 + o_z^2 = 1, \\ a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} {}^{A}\boldsymbol{n}_B \times {}^{A}\boldsymbol{o}_B = {}^{A}\boldsymbol{a}_B \\ {}^{A}\boldsymbol{o}_B \times {}^{A}\boldsymbol{a}_B = {}^{A}\boldsymbol{n}_B \\ {}^{A}\boldsymbol{a}_B \times {}^{A}\boldsymbol{n}_B = {}^{A}\boldsymbol{o}_B \end{cases} $$

① 按列向量构建 → 旋转变换矩阵，用$\boldsymbol{R}$表示

② 按行向量构建 → 方向余弦矩阵，用$\boldsymbol{C}$表示

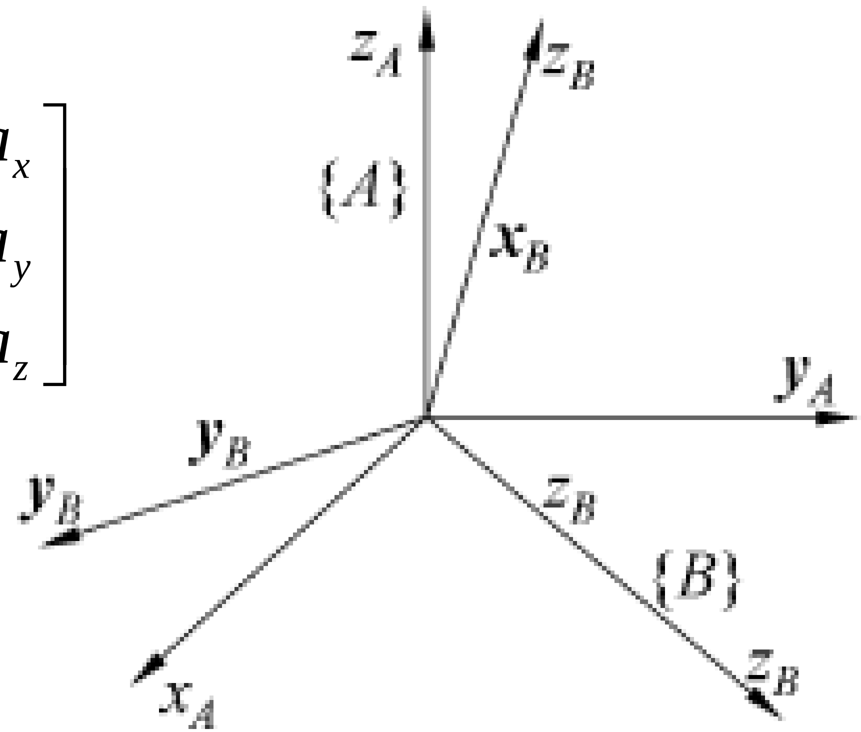
→ $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$

2.2.2 旋转变换矩阵表示法

◆ 旋转变换矩阵的定义

坐标系{B}相对于{A}的姿态表示为

$$ {}^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \left[{}^{A}\boldsymbol{x}_{B}, {}^{A}\boldsymbol{y}_{B}, {}^{A}\boldsymbol{z}_{B} \right] = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x \\ n_y & o_y & a_y \\ n_z & o_z & a_z \end{bmatrix} $$



***R*为旋转变换矩阵**

$$ \left({}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \right)^{-1} = \left({}^{A}\boldsymbol{R}_{B} \right)^{\mathrm{T}} = {}^{B}\boldsymbol{R}_{A} $$

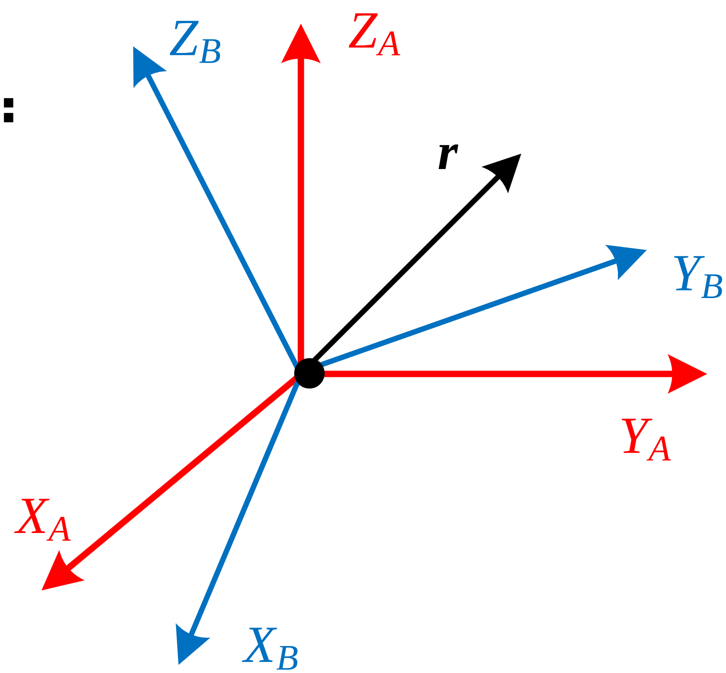
◆ 应用1——矢量的旋转变换(矢量在不同坐标系中的表示)

若矢量r在{A}、{B}系中的分别表示为：

$$ {}^{A}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} {}^{A}r_x \\ {}^{A}r_y \\ {}^{A}r_z \end{bmatrix}, \quad {}^{B}\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} {}^{B}r_x \\ {}^{B}r_y \\ {}^{B}r_z \end{bmatrix} $$

则满足如下关系：

$$ {}^{A}\boldsymbol{r} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\, {}^{B}\boldsymbol{r} $$



同一矢量在不同坐标系中的表示

（矢量的旋转变换）

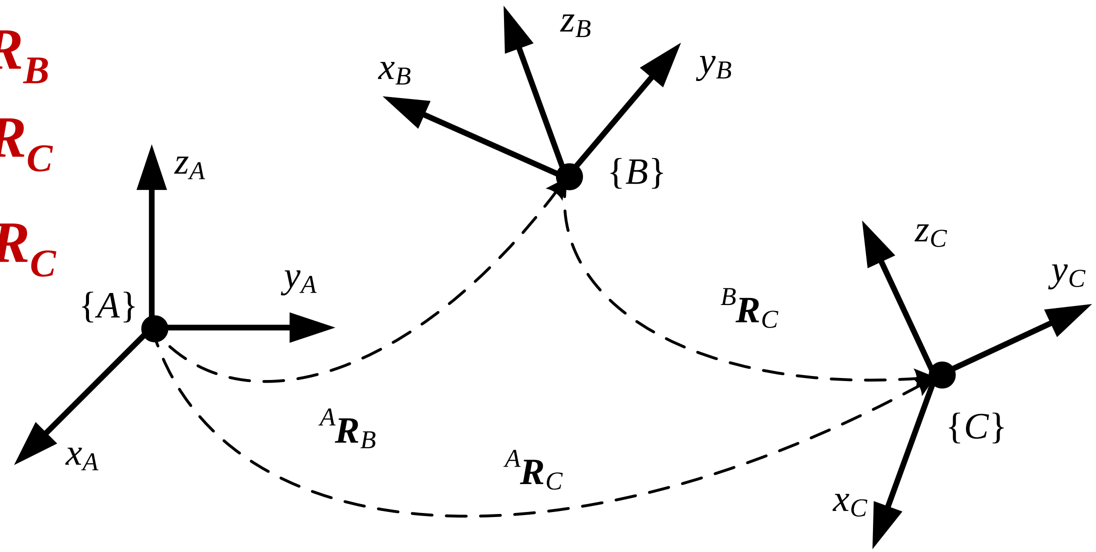
2.2.2 旋转变换矩阵表示法

◆ 应用2——有限转动的合成（多个坐标系的连续变换）

- 若 {A}到{B} 的旋转矩阵为${}^{A}\boldsymbol{R}_{B}$
  {B}到{C} 的变换矩阵为${}^{B}\boldsymbol{R}_{C}$
- 则 {A}到{C} 的转变换矩阵${}^{A}\boldsymbol{R}_{C}$

(从左往右乘)

$$ {}^{A}\boldsymbol{R}_{C} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{R}_{C} $$

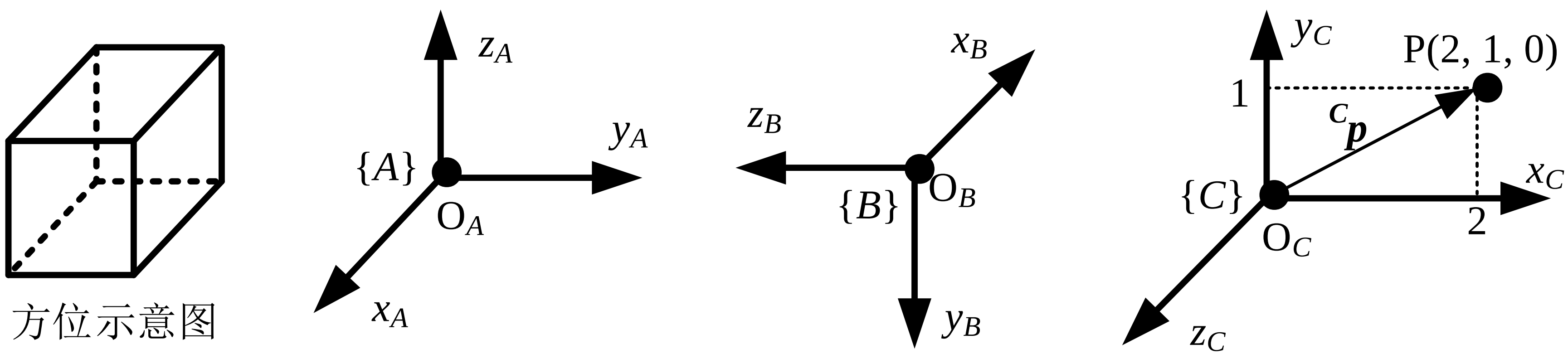


一般地，依次经过n次变换，即$\boldsymbol{R}_1$、$\boldsymbol{R}_2$、$\boldsymbol{R}_n$，则(从左往右乘)

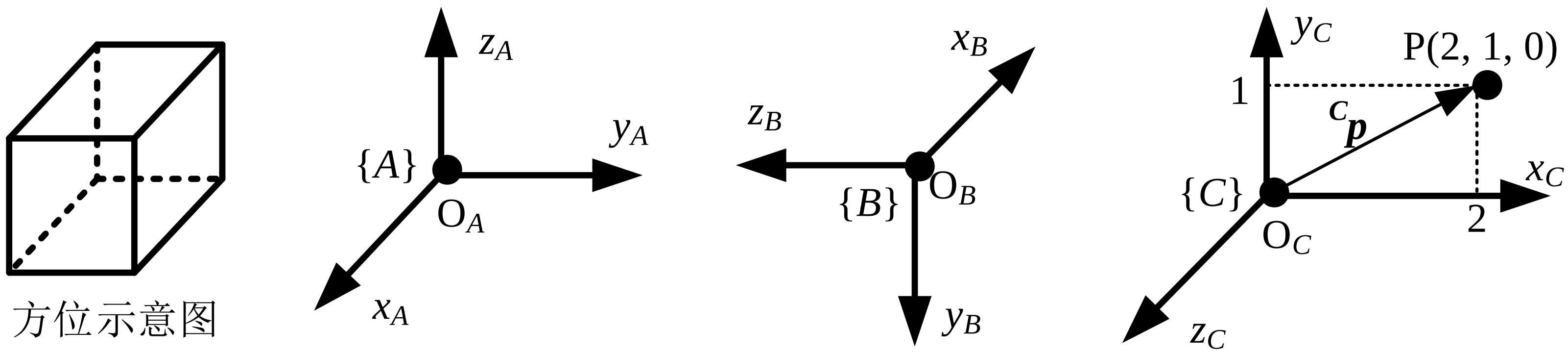
$$ \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 \cdots \boldsymbol{R}_n $$

◆ 举例

坐标系{A}、{B}、{C}的相对关系及点P的坐标如下图所示。通过观察得出各坐标系之间的旋转变换矩阵，并验证矢量变换、多坐标系的连续变换关系。



◆ 举例



根据观察可得：

$$ {}^A\boldsymbol{x}_B = -{}^A\boldsymbol{x}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^A\boldsymbol{y}_B = -{}^A\boldsymbol{z}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad {}^A\boldsymbol{z}_B = -{}^A\boldsymbol{y}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} $$

因此，{B}相对于{A}的姿态变换矩阵为：

$$ {}^A\boldsymbol{R}_B = \begin{bmatrix} {}^A\boldsymbol{x}_B & {}^A\boldsymbol{y}_B & {}^A\boldsymbol{z}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} $$

2.2.2 旋转变换矩阵表示法

◆ **举例**

类似地：

$$ {}^{B}\boldsymbol{x}_C = -{}^{B}\boldsymbol{z}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad {}^{B}\boldsymbol{y}_C = -{}^{B}\boldsymbol{y}_B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{B}\boldsymbol{z}_C = -{}^{B}\boldsymbol{x}_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\boldsymbol{x}_C = {}^{A}\boldsymbol{y}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad {}^{A}\boldsymbol{y}_C = {}^{A}\boldsymbol{z}_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad {}^{A}\boldsymbol{z}_C = {}^{A}\boldsymbol{x}_A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} $$

因此，{C}相对于{B}、{A}的姿态变换矩阵为：

$$ {}^{B}\boldsymbol{R}_C = \begin{bmatrix} {}^{B}\boldsymbol{x}_C & {}^{B}\boldsymbol{y}_C & {}^{B}\boldsymbol{z}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{A}\boldsymbol{R}_C = \begin{bmatrix} {}^{A}\boldsymbol{x}_C & {}^{A}\boldsymbol{y}_C & {}^{A}\boldsymbol{z}_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} $$

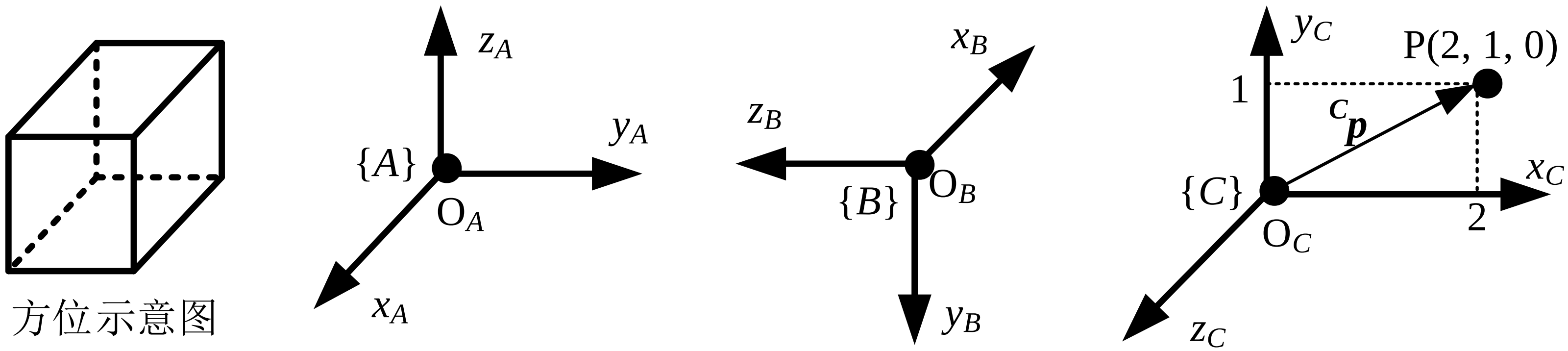
验算

满足

$$ {}^{A}\boldsymbol{R}_C = {}^{A}\boldsymbol{R}_B\, {}^{B}\boldsymbol{R}_C $$

2.2.2 旋转变换矩阵表示法

◆ 举例



对于点P，根据其在{C}中的坐标及坐标系间的关系，可得：

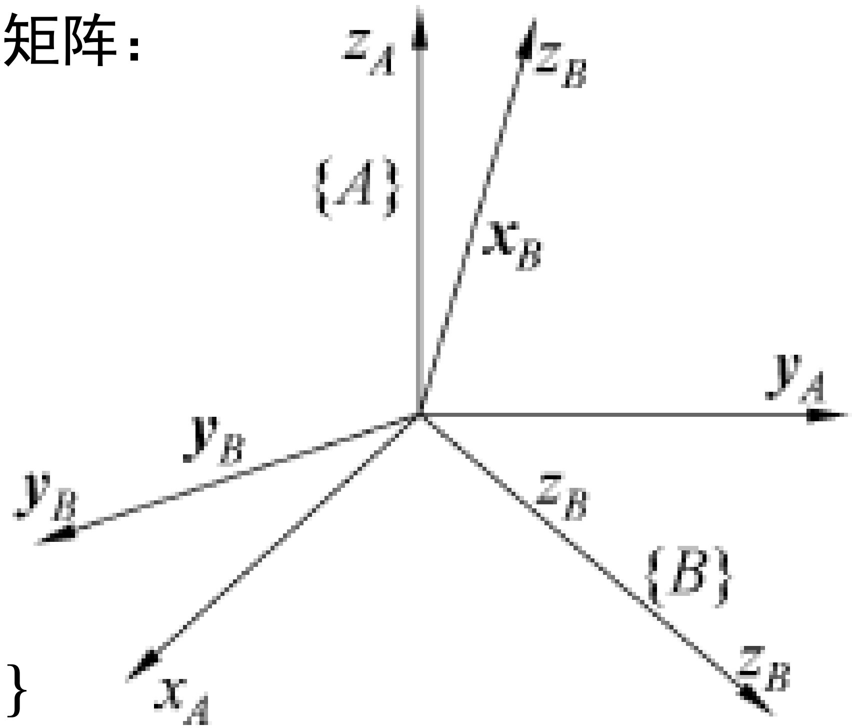
$$ {}^{C}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}\boldsymbol{p} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{C} \cdot {}^{C}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} $$

$$ \Rightarrow {}^{B}\boldsymbol{p} = {}^{B}\boldsymbol{R}_{C} \cdot {}^{C}\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} $$

◆ 方向余弦矩阵的定义

各轴的方向向量作为行向量，构造矩阵：

$$
{}^{A}\boldsymbol{C}_{B}=\begin{bmatrix}\left[{}^{A}\boldsymbol{n}_{B}\right]^{\mathrm{T}}\\ \left[{}^{A}\boldsymbol{o}_{B}\right]^{\mathrm{T}}\\ \left[{}^{A}\boldsymbol{a}_{B}\right]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}n_x & n_y & n_z\\ o_x & o_y & o_z\\ a_x & a_y & a_z\end{bmatrix}
$$



称$\boldsymbol{C}$为方向余弦矩阵，满足$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}$，也可用于表示坐标系{B}相对于{A}的姿态

2.2.3 方向余弦矩阵表示法

◆ 应用1——矢量的旋转变换(矢量在不同坐标系中的表示)

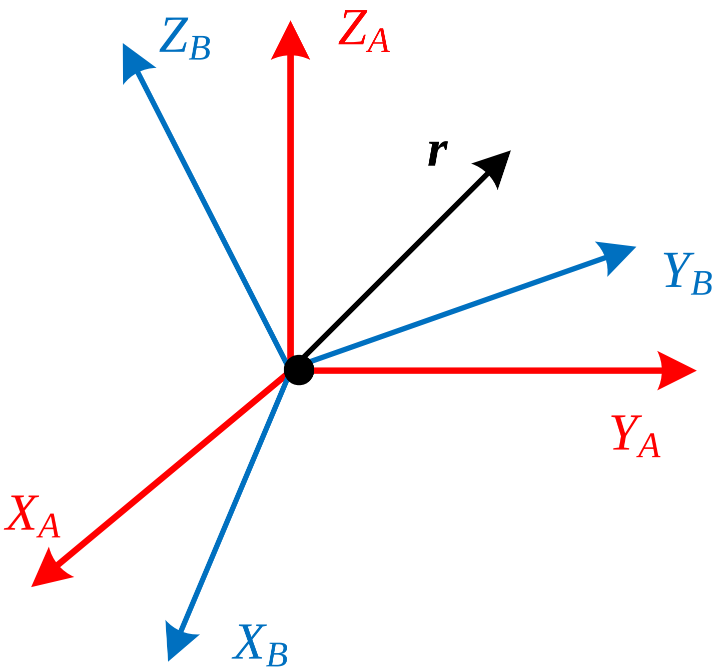
➢ 若矢量r在{A}、{B}系中的关系为：

$$^{A}\boldsymbol{r} = \left[{}^{A}\boldsymbol{C}_{B} \right]^{\mathrm{T}} \cdot {}^{B}\boldsymbol{r}$$

也可表示为：

$$^{B}\boldsymbol{r} = {}^{A}\boldsymbol{C}_{B} \cdot {}^{A}\boldsymbol{r}$$

（注意比较 $^{A}\boldsymbol{r} = {}^{A}\boldsymbol{R}_{B}\, {}^{B}\boldsymbol{r}$ ）



同一矢量在不同坐标系中的表示
（矢量的旋转变换）

2.2.3 方向余弦矩阵表示法

◆ 应用2——有限转动的合成（多个坐标系的连续变换）

➢ 若坐标系{1}到{2}、{2}到{3}、…、{n-1}到{n}的方向余弦矩阵为：

$$C_1、C_2、\cdots\cdots C_n$$

➢ 则{1}到{n}的方向余弦矩阵为（“从右向左”乘）：

$$C = C_n \cdots C_2 C_1$$

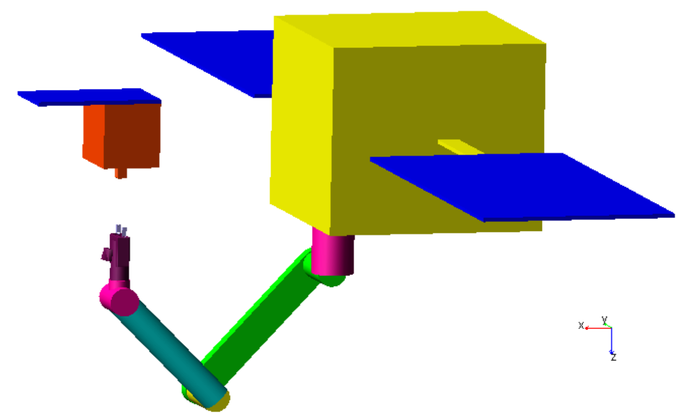
2.2.4 姿态矩阵的使用习惯

◆ 旋转变换矩阵与方向余弦矩阵的关系

根据上面的推导可知，即两者互为转置： ${}^{A}\boldsymbol{R}_{B} = \left[{}^{A}\boldsymbol{C}_{B}\right]^{\mathrm{T}}$

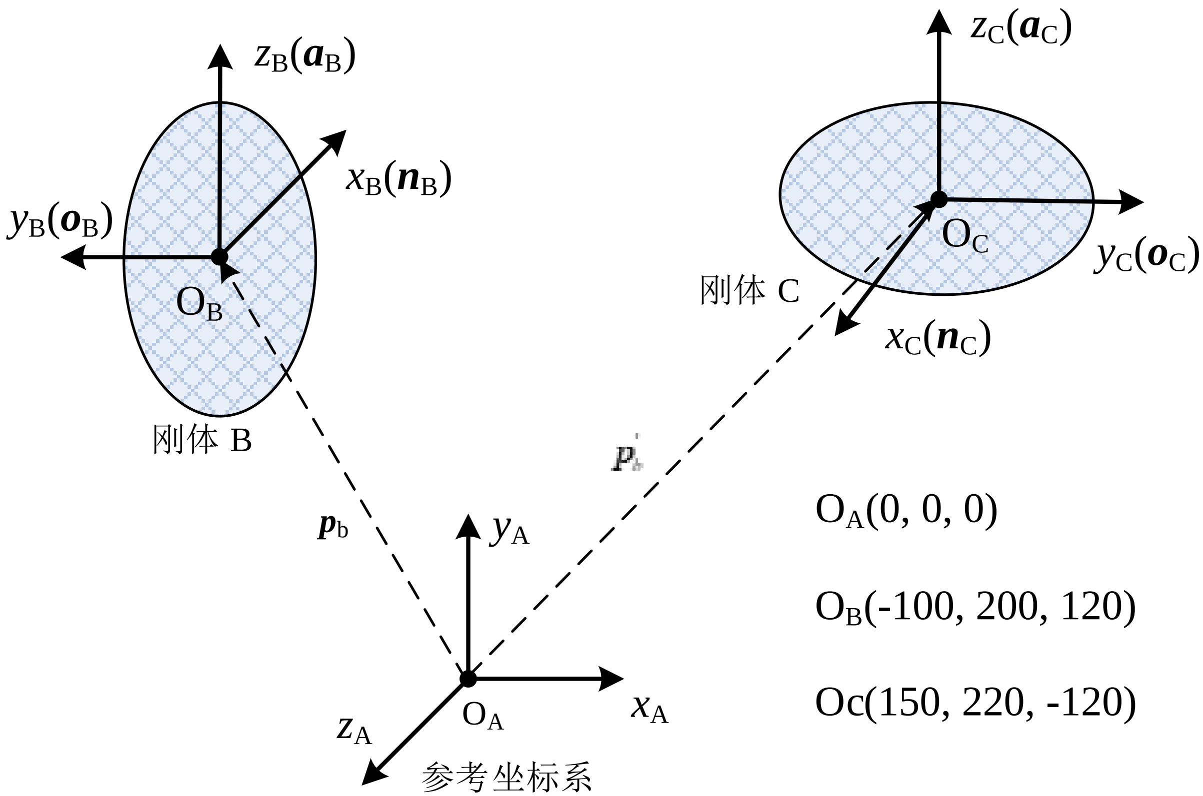
◆ 不同的应用习惯

- 在**机器人学**及相近学科，一般**采用*R***（**末端映射到惯性空间**）
- 在**航空航天**及相近学科，一般**采用*C***（**惯性空间映射到本体**）
- 对于**机器人卫星呢？**　　　混合使用***R***和***C***



计算实例

刚体B、C及参考系{A}的状态如图所示。计算B、C相对于 {A}的位置和姿态，其中姿态需要分别给出姿态变换矩阵、方向余弦矩阵。



$O_A(0, 0, 0)$

$O_B(-100, 200, 120)$

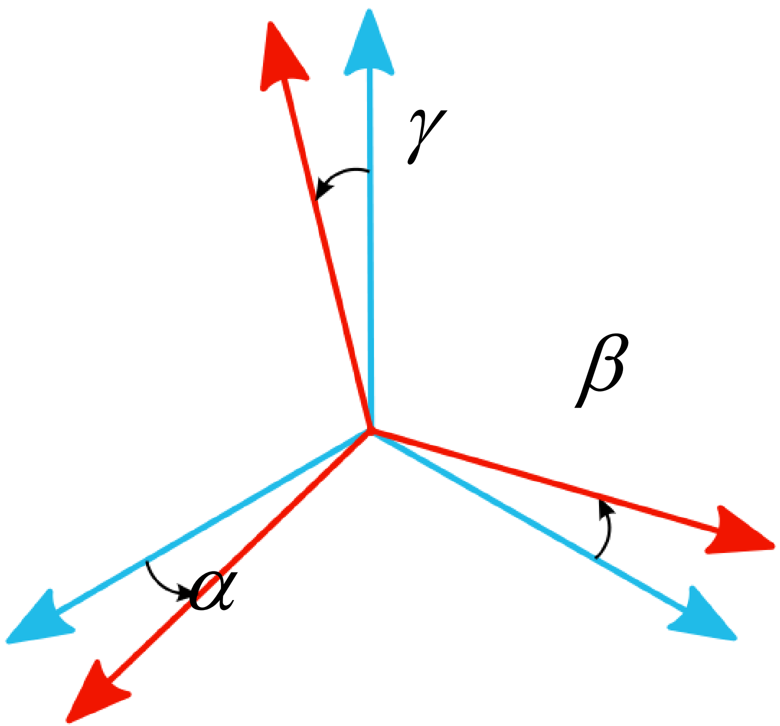
$O_C(150, 220, -120)$

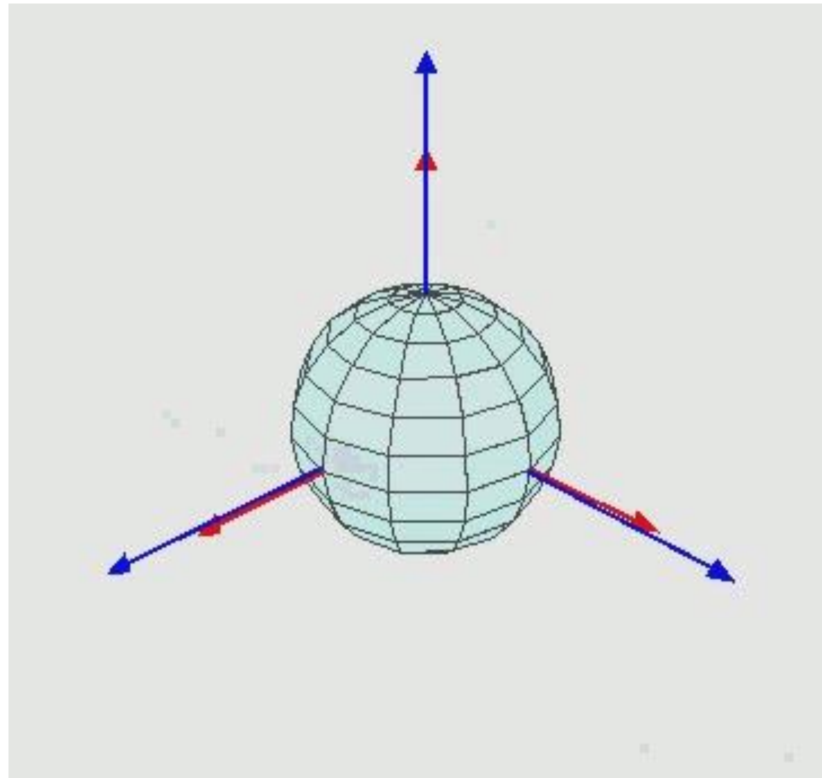
主要内容

2.3.1 欧拉有限转动

◆ 欧拉有限转动定理

刚体在三维空间中的有限转动可通过绕坐标轴依次旋转三次来实现（旋转三次的说明：最多三次，且相邻两次的旋转轴不同）。





2.3.2 欧拉角的定义

◆ 欧拉角

根据欧拉有限转动定理，坐标系{A}可以经过三次基本旋转后实现与{B}完全相同的三轴指向，这三次基本旋转的角度合称为欧拉角。

第1次、第2次、第3次旋转的角度记依次记为α、β、γ，则欧拉角表示为：

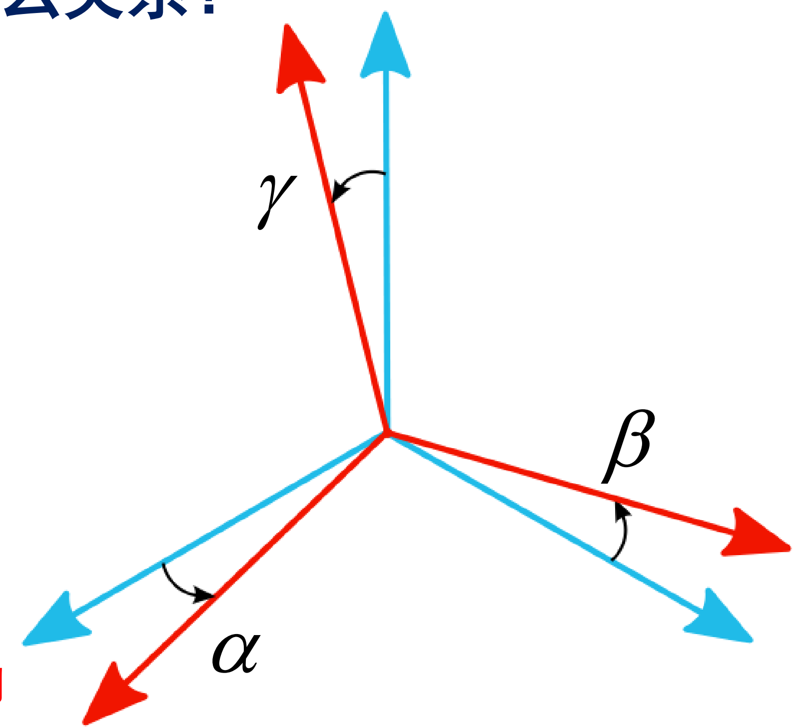
$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix}$$

注：上述表示规则与具体坐标轴无关，仅与旋转顺序有关，即第1次(可能是x、y、z中的任何一轴）旋转的角度记为α，第2次记为β，第3次记为γ。

◆ 欧拉角表示法涉及的关键问题

➢ **提问：根据前面的分析，刚体的姿态可以采用旋转变换矩阵表示，也可以采用欧拉角，那么两者之间有什么关系？**

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}n_x & o_x & a_x\\ n_y & o_y & a_y\\ n_z & o_z & a_z\end{bmatrix}$$



➢ **涉及到如下4个子问题：**

①单次旋转是什么关系 → 基本旋转

②采用什么旋转顺序 → 欧拉角的类型

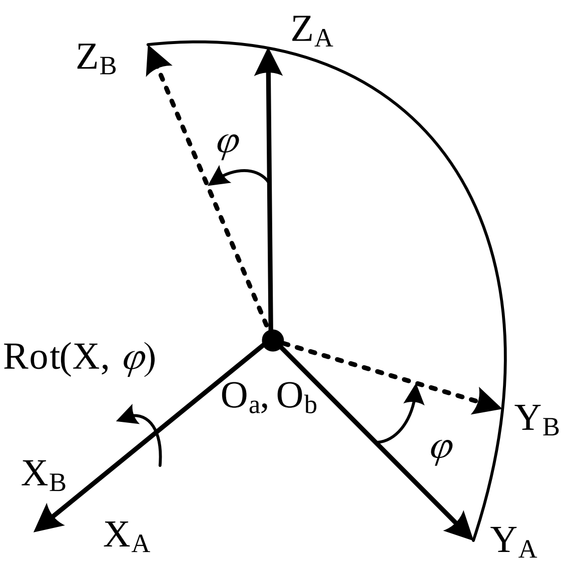
③旋转中的参考系是否固定 → 动/定轴欧拉角

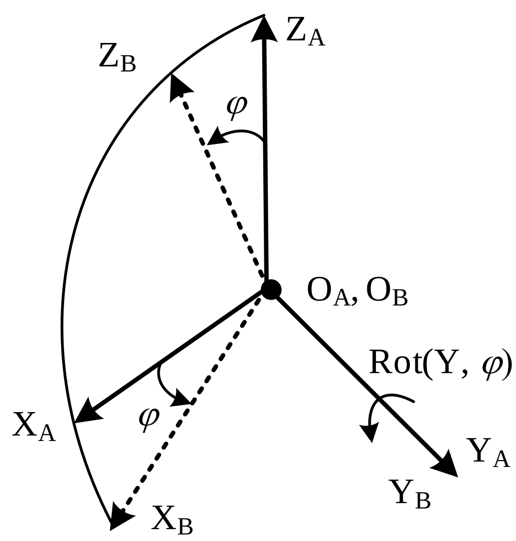
④欧拉角与矩阵的相互转换 → Ψ vs R

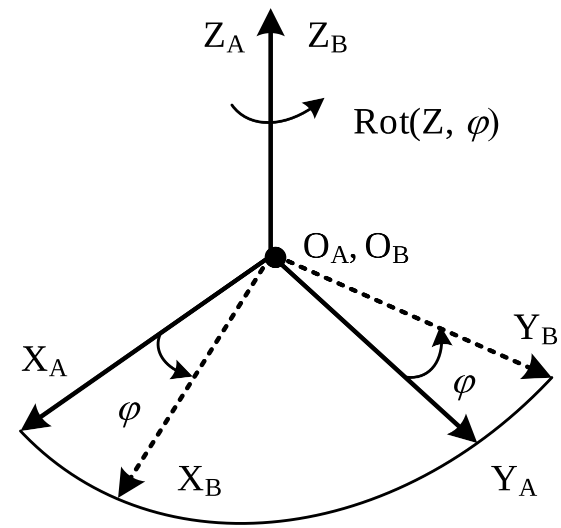
2.3.2 欧拉角的定义

◆ 基本旋转

绕坐标轴（即x、y、z轴）旋转有限角度的运动称为基本旋转。

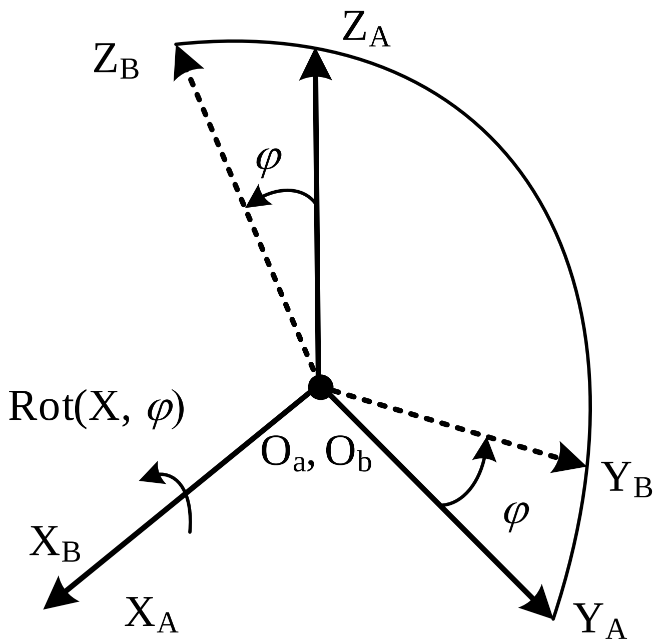






◆ 基本旋转与姿态变换矩阵

绕x轴旋转φ角：

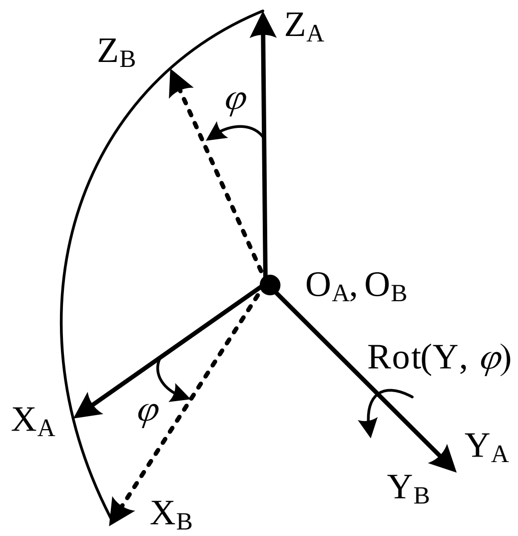


$$\boldsymbol{R}_x(\varphi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi\\ 0 & s_\varphi & c_\varphi\end{bmatrix}$$

其中， $c_\varphi=\cos\varphi$; $s_\varphi=\sin\varphi$

◆ 基本旋转与姿态变换矩阵

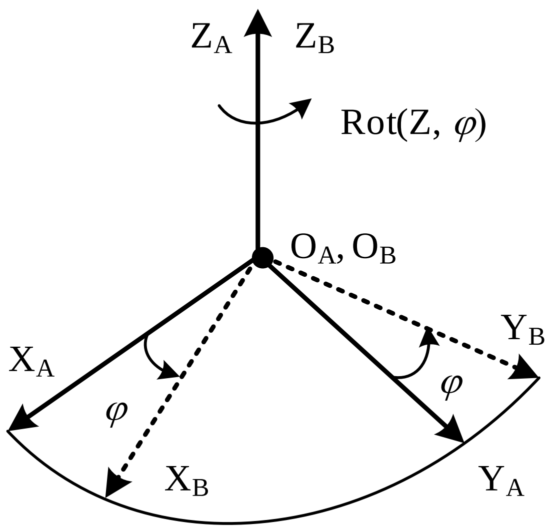
绕y轴旋转φ角：



$$\boldsymbol{R}_y(\varphi)=\begin{bmatrix} c_\varphi & 0 & s_\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi \end{bmatrix}$$

◆ 基本旋转与姿态变换矩阵

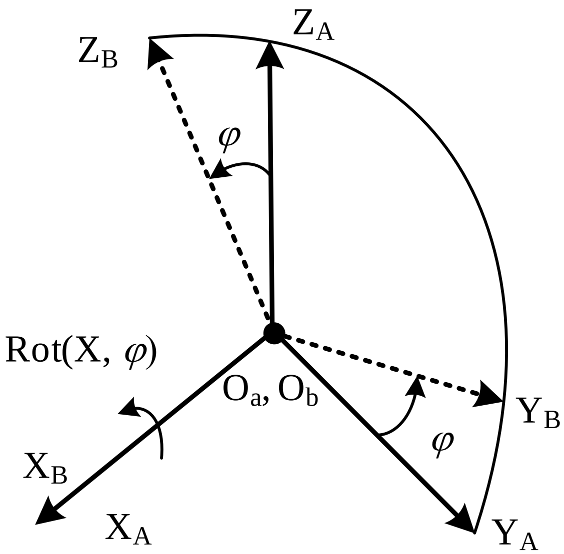
绕z轴旋转φ角：

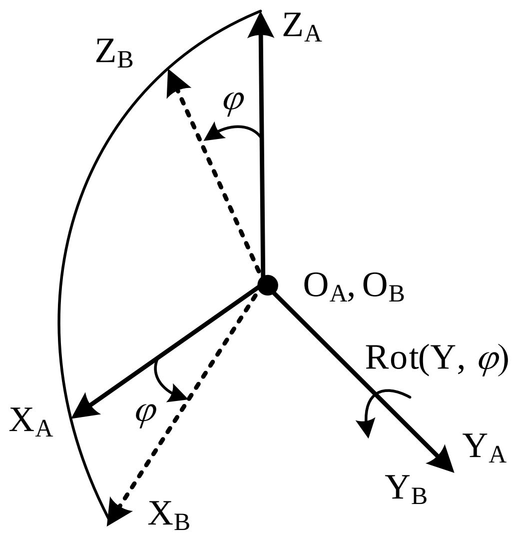


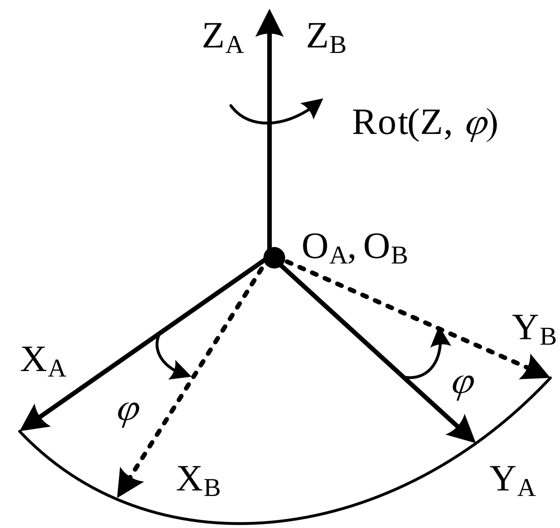
$$\boldsymbol{R}_z(\varphi)=\begin{bmatrix} c_\varphi & -s_\varphi & 0 \\ s_\varphi & c_\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2.3.3 基本旋转与欧拉角的类型

◆ 基本旋转与姿态变换矩阵







$$\boldsymbol{R}_x(\varphi)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & c_\varphi & -s_\varphi\\ 0 & s_\varphi & c_\varphi\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_y(\varphi)=\begin{bmatrix}c_\varphi & 0 & s_\varphi\\ 0 & 1 & 0\\ -s_\varphi & 0 & c_\varphi\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{R}_z(\varphi)=\begin{bmatrix}c_\varphi & -s_\varphi & 0\\ s_\varphi & c_\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

◆ 欧拉角的类型

➢ 第I类(a-b-c旋转类):

xyz，xzy，yxz，yzx，zxy，zyx

➢ 第II类(a-b-a旋转):

xyx，xzx，yxy，yzy，zxz，zyz

如何选择

选择旋转顺序的原则
- ✓ 明确的物理意义
- ✓ 便于测量与控制
- ✓ 遵循工程界习惯

共有2类、12种欧拉角

问题： 经过3次基本旋转后的姿态矩阵如何计算？

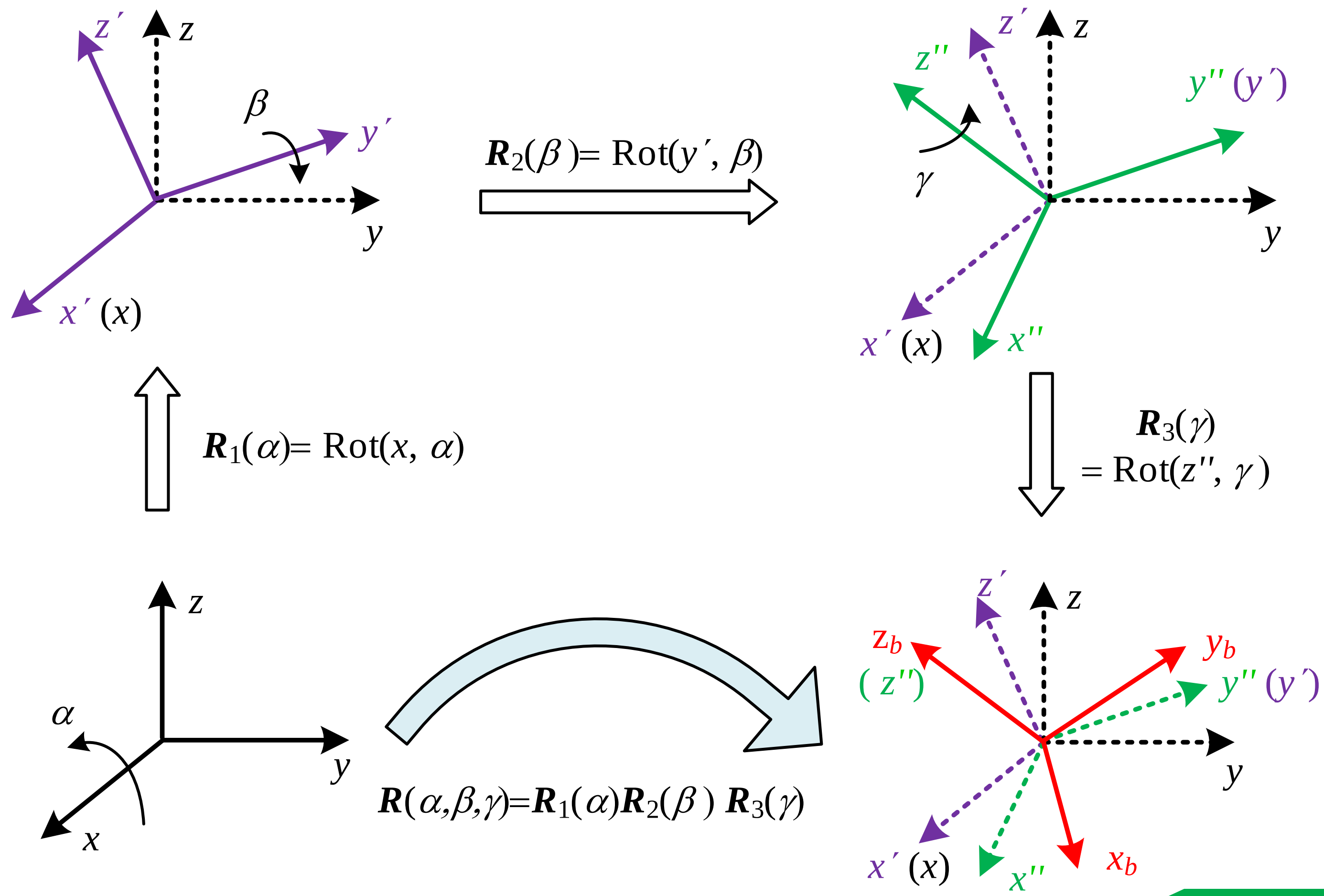
即已知 $\boldsymbol{R}_1(\alpha)$、$\boldsymbol{R}_2(\beta)$、$\boldsymbol{R}_3(\gamma)$，如何计算$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)$?

提示： 可结合前述旋转变换矩阵的应用2，即多个坐标系的连续变换

2.3.4 欧拉角的等效旋转变换

1. 动轴欧拉角的等效转动

经过三次基本旋转，旋转轴为**新坐标轴**，实现$\{x, y, z\} \rightarrow \{x_b, y_b, z_b\}$



2.3.4 欧拉角的等效旋转变换

1. 动轴欧拉角的等效转动

经过三次基本旋转，旋转轴为新坐标轴，实现{x, y, z}→ {x_b, y_b, z_b}

以x-y-z旋转顺序为例

①第1次旋转：坐标系{x, y, z}绕**原坐标轴x**旋转， **{x, y, z} → {x', y', z'}**

$$\boldsymbol{R}_1(\alpha)=\mathrm{Rot}(x,\alpha)$$

②第2次旋转：**新系** **{x‘, y’, z‘}**绕**新坐标轴y'**旋转， **{x', y', z’} → {x'', y'', z''}**

$$\boldsymbol{R}_2(\beta)=\mathrm{Rot}(y',\beta)$$

③第3次旋转：**新新系{x'', y'', z''}**绕**新新轴z''**旋转， **{x'', y'', z''} → {x_b, y_b, z_b}**

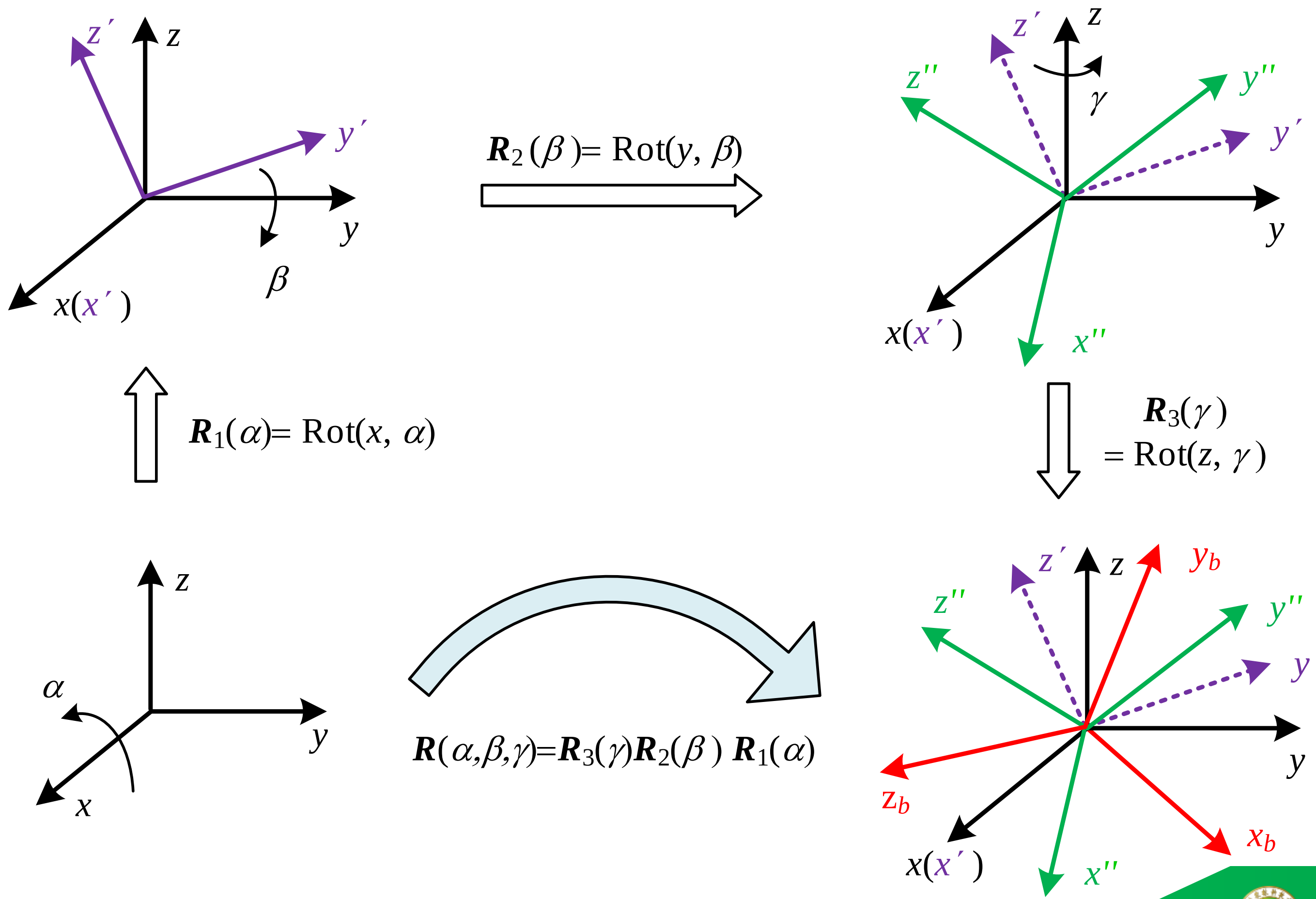
$$\boldsymbol{R}_3(\gamma)=\mathrm{Rot}(z'',\gamma)$$

因此，动轴欧拉角对应的等效旋转变换矩阵为（“从左向右”乘）

$$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma)$$

2. 定轴欧拉角的等效转动

经过三次基本旋转，旋转轴为原坐标轴，实现{x, y, z}→ {x_b, y_b, z_b}



2. 定轴欧拉角的等效转动

经过三次基本旋转，旋转轴为原坐标轴，实现{x, y, z}→ {x_b, y_b, z_b}

以x-y-z旋转顺序为例

①第1次旋转：坐标系{x, y, z}绕**原坐标轴**旋转， **{x, y, z} → {x', y', z'}**

$$\boldsymbol{R}_1(\alpha)=\mathrm{Rot}(x,\alpha)$$

②第2次旋转：**新系** {x‘, y’, z‘}绕**原坐标轴y**旋转， **{x', y', z’} → {x'', y'', z''}**

$$\boldsymbol{R}_2(\beta)=\mathrm{Rot}(y,\beta)$$

③第3次旋转：**新新系{x‘’, y‘’, z‘’}**绕**原坐标轴z**旋转， **{x'', y'', z''} → {x_b, y_b, z_b}**

$$\boldsymbol{R}_3(\gamma)=\mathrm{Rot}(z,\gamma)$$

因此，定轴欧拉角对应的等效旋转变换矩阵为（“从右向左”乘）

$${}^{0}\boldsymbol{R}_1=\boldsymbol{R}_1$$

$${}^{0}\boldsymbol{R}_2={}^{0}\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2$$

$${}^{0}\boldsymbol{R}_3={}^{0}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3=\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_3$$

3. 等效旋转变换的性质及其推广

- 绕动坐标轴旋转（动轴欧拉角，“从左往右”乘）

$$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma)$$

- 绕定坐标轴旋转（定轴欧拉角，“从右往左”乘）

$$\boldsymbol{R}(\alpha,\beta,\gamma)=\boldsymbol{R}_3(\gamma)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_1(\alpha)$$

结论： 绕动轴旋转，从左往右乘
绕定轴旋转，从右往左乘

→ 此结论对多次效旋转变换依然成立！

动轴： 三次基本旋转对应的坐标轴为旋转过程中的新坐标轴

定轴： 三次基本旋转对应的坐标轴为原坐标系的固定坐标轴

1. 动轴xyz欧拉角

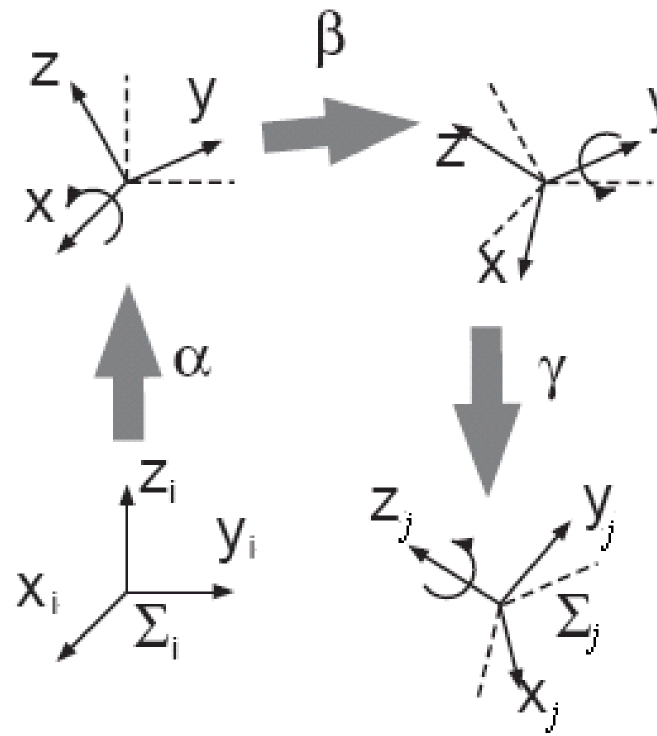
(1) 根据欧拉角求矩阵，即 $\Psi \rightarrow R$

➢ 根据前述定义，按“从左往右”乘的规则，可得

$$R = R_1(\alpha) R_2(\beta) R_3(\gamma) = R_x(\alpha) R_{y'}(\beta) R_{z''}(\gamma)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$$



2.3.5 欧拉角与旋转变换矩阵的转换

1. 动轴xyz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$\boldsymbol{R}\rightarrow\Psi$

➢ 给定（已知条件）

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

➢ 结合（带参表达式）

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix}$$

联立

求解

①根据$s_\beta=a_{13}$，可求β

$$\begin{cases} \beta=\arcsin a_{13} \\ \beta=\pi-\arcsin a_{13} \end{cases}$$

②已知β，根据下式可求α

$$\begin{cases} -s_\alpha c_\beta=a_{23} \\ c_\alpha c_\beta=a_{33} \end{cases}$$

③已知β，根据下式可求γ

$$\begin{cases} -c_\beta s_\gamma=a_{12} \\ c_\beta c_\gamma=a_{11} \end{cases}$$

2.3.5 欧拉角与旋转变换矩阵的转换

1. 动轴xyz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$

- 首先求解β

$$s_\beta = a_{13} \Rightarrow \beta = \arcsin a_{13} \quad \text{或} \quad \beta = \pi - \arcsin a_{13}$$

- 若$a_{13} \neq \pm 1$，则$\beta \neq \pm \pi/2$，$c_\beta \neq 0$，因此

$$\begin{cases} -s_\alpha c_\beta = a_{23} \\ c_\alpha c_\beta = a_{33} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_\alpha = -a_{23}/c_\beta \\ c_\alpha = a_{33}/c_\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \mathrm{atan2}\left(-a_{23}/c_\beta,\ a_{33}/c_\beta\right)$$

$$\begin{cases} -c_\beta s_\gamma = a_{12} \\ c_\beta c_\gamma = a_{11} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_\gamma = -a_{12}/c_\beta \\ c_\gamma = a_{11}/c_\beta \end{cases} \Rightarrow \gamma = \mathrm{atan2}\left(-a_{12}/c_\beta,\ a_{11}/c_\beta\right)$$

1. 动轴xyz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$\boldsymbol{R}\rightarrow\Psi$

- 若a_{13}=1，则$\beta=\pi/2$，$s_\beta=1$，$c_\beta=0$

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_\beta c_\gamma & -c_\beta s_\gamma & s_\beta \\ s_\alpha s_\beta c_\gamma+c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\beta s_\gamma+c_\alpha c_\gamma & -s_\alpha c_\beta \\ -c_\alpha s_\beta c_\gamma+s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\beta s_\gamma+s_\alpha c_\gamma & c_\alpha c_\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{s_\beta=1,\ c_\beta=0}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ s_\alpha c_\gamma+c_\alpha s_\gamma & -s_\alpha s_\gamma+c_\alpha c_\gamma & 0 \\ -c_\alpha c_\gamma+s_\alpha s_\gamma & c_\alpha s_\gamma+s_\alpha c_\gamma & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin(\alpha+\gamma) & \cos(\alpha+\gamma) & 0 \\ -\cos(\alpha+\gamma) & \sin(\alpha+\gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha+\gamma=\operatorname{atan2}(a_{21},a_{22})$$

1. 动轴xyz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即*R*→*Ψ*

- 若a_{13}=-1，则β=-π/2，s_β = -1，c_β = 0，因此

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -s_\alpha c_\gamma + c_\alpha s_\gamma & s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\gamma & 0 \\ c_\alpha c_\gamma + s_\alpha s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma + s_\alpha c_\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -\sin(\alpha-\gamma) & \cos(\alpha-\gamma) & 0 \\ \cos(\alpha-\gamma) & \sin(\alpha-\gamma) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha-\gamma=\operatorname{atan2}\left(-a_{21}, a_{22}\right)$$

1. 动轴xyz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$\boldsymbol{R}\rightarrow\boldsymbol{\Psi}$

- 完整的求解表达式

若$(a_{13}=\pm 1)$,

$$\begin{cases}\beta=\pm\dfrac{\pi}{2}\\ \alpha\pm\gamma=\operatorname{atan}2\left(\pm a_{21},a_{22}\right)\end{cases}$$

特殊情况 → 姿态奇异，无法确定α和γ，而只能求其和或差

姿态奇异条件为$\beta=\pm\dfrac{\pi}{2}$

其他，

$$\begin{cases}\beta=\arcsin a_{13}\quad 或\quad \beta=\pi-\arcsin a_{13}\\ \alpha=\operatorname{atan}2\left(-a_{23}/c_{\beta},\ a_{33}/c_{\beta}\right)\\ \gamma=\operatorname{atan}2\left(-a_{12}/c_{\beta},\ a_{11}/c_{\beta}\right)\end{cases}$$

一般情况 → 可得两组不同的欧拉角，说明有两种可能

2. 动轴zxz欧拉角

(1) 根据欧拉角求矩阵，即 $\Psi \rightarrow R$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_1(\alpha)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_3(\gamma)=\boldsymbol{R}_z(\alpha)\boldsymbol{R}_{x'}(\beta)\boldsymbol{R}_{z''}(\gamma)$$

$$=\begin{bmatrix} c_\alpha & -s_\alpha & 0 \\ s_\alpha & c_\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\beta & -s_\beta \\ 0 & s_\beta & c_\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\beta c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\gamma + c_\alpha c_\beta s_\gamma & -s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\beta c_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

2. 动轴zxz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{\Psi}$

- 给定（已知条件）

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

- 结合（带参表达式）

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} c_\alpha c_\gamma - s_\alpha c_\beta s_\gamma & -c_\alpha s_\gamma - s_\alpha c_\beta c_\gamma & s_\alpha s_\beta \\ s_\alpha c_\gamma + c_\alpha c_\beta s_\gamma & -s_\alpha s_\gamma + c_\alpha c_\beta c_\gamma & -c_\alpha s_\beta \\ s_\beta s_\gamma & s_\beta c_\gamma & c_\beta \end{bmatrix}$$

联立 → 求解

①根据$c_\beta=a_{33}$，可求β

$$\beta=\pm\arccos a_{33}$$

②已知β，根据下式可求α

$$\begin{cases} s_\alpha s_\beta = a_{13} \\ -c_\alpha s_\beta = a_{23} \end{cases}$$

③已知β，根据下式可求γ

$$\begin{cases} s_\beta s_\gamma = a_{31} \\ s_\beta c_\gamma = a_{32} \end{cases}$$

2. 动轴zxz欧拉角

(2) 根据矩阵求欧拉角，即$R\rightarrow\Psi$

- 完整的求解表达式

若$(a_{33}=\pm 1)$，

$$\begin{cases}\beta=0 \text{ 或 } \beta=\pi \\ \alpha\pm\gamma=\operatorname{atan2}(a_{21},a_{11})\end{cases}$$

特殊情况 → 姿态奇异，无法确定α和γ，而只能求其和或差

姿态奇异条件为 $\beta=0,\pi$

其他，

$$\begin{cases}\beta=\arccos a_{33} \text{ 或 } \beta=-\arccos a_{33} \\ \alpha=\operatorname{atan2}\left(a_{13}/s_\beta,\ -a_{23}/s_\beta\right) \\ \gamma=\operatorname{atan2}\left(a_{31}/s_\beta,\ a_{32}/s_\beta\right)\end{cases}$$

一般情况 → 可得两组不同的欧拉角，说明有两种可能

3. 求解举例

已知

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix} 0.8138 & 0.4698 & 0.3420 \\ -0.5438 & 0.8232 & 0.1632 \\ -0.2049 & -0.3188 & 0.9254 \end{bmatrix}$$

求得XYZ欧拉角

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_1=[-10, \ 20, \ -30], & (\beta=20^o) \\ \boldsymbol{\Psi}_2=[170, \ 160, \ 150], & (\beta=160^o) \end{cases}$$

求得ZXZ欧拉角

$$\begin{cases} \boldsymbol{\Psi}_1=[115.51 \quad 22.27 \quad -147.27], & (\beta=22.27^o) \\ \boldsymbol{\Psi}_2=[-64.49 \quad -22.27 \quad 32.73], & (\beta=-22.27^o) \end{cases}$$

提问：不同的姿态角，对应的姿态是否一致？

2.3.6 姿态奇异的分析

1. 姿态奇异条件

- 第I类欧拉角(*xyz*、*xzy*、*yxz*、*yzx*、*zxy*、*zyx*)姿态奇异的条件

$$\beta = \pm\frac{\pi}{2}$$

- 第II类欧拉角(*xyx*、*xzx*、*yxy*、*yzy*、*zxz*、*zyz*)姿态奇异的条件

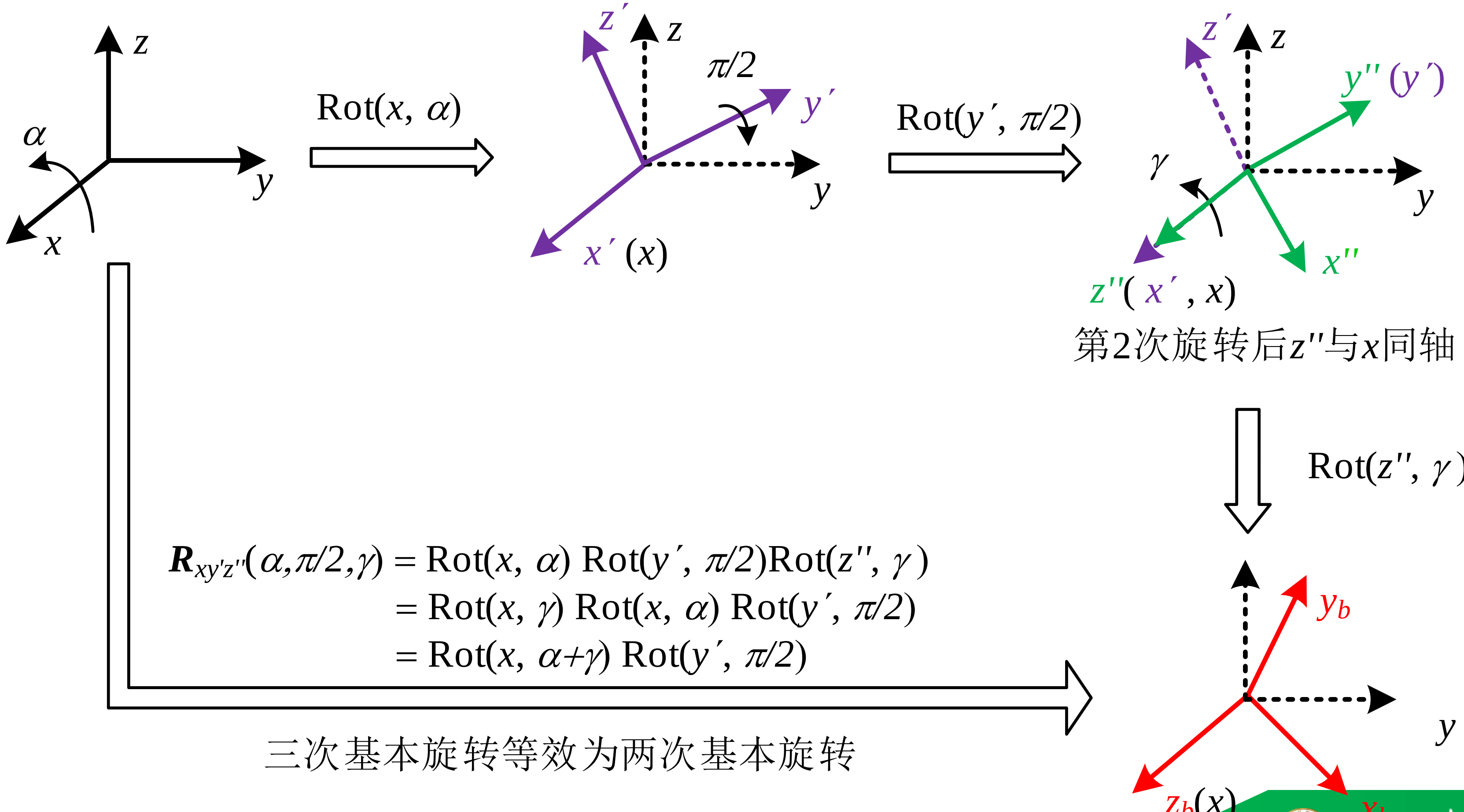
$$\beta = 0 \quad 或 \quad \beta = \pi$$

特点：不论是哪种欧拉角，出现姿态奇异时，无法确定α和γ，但可以确定$\alpha \pm \gamma$

2.3.6 姿态奇异的分析

2. 第I类欧拉角姿态奇异性分析（xyz欧拉角为例）

- 当第2次旋转$\beta=\pm\pi/2$时，z”与x同轴，使得第3和第1转角叠加或抵消

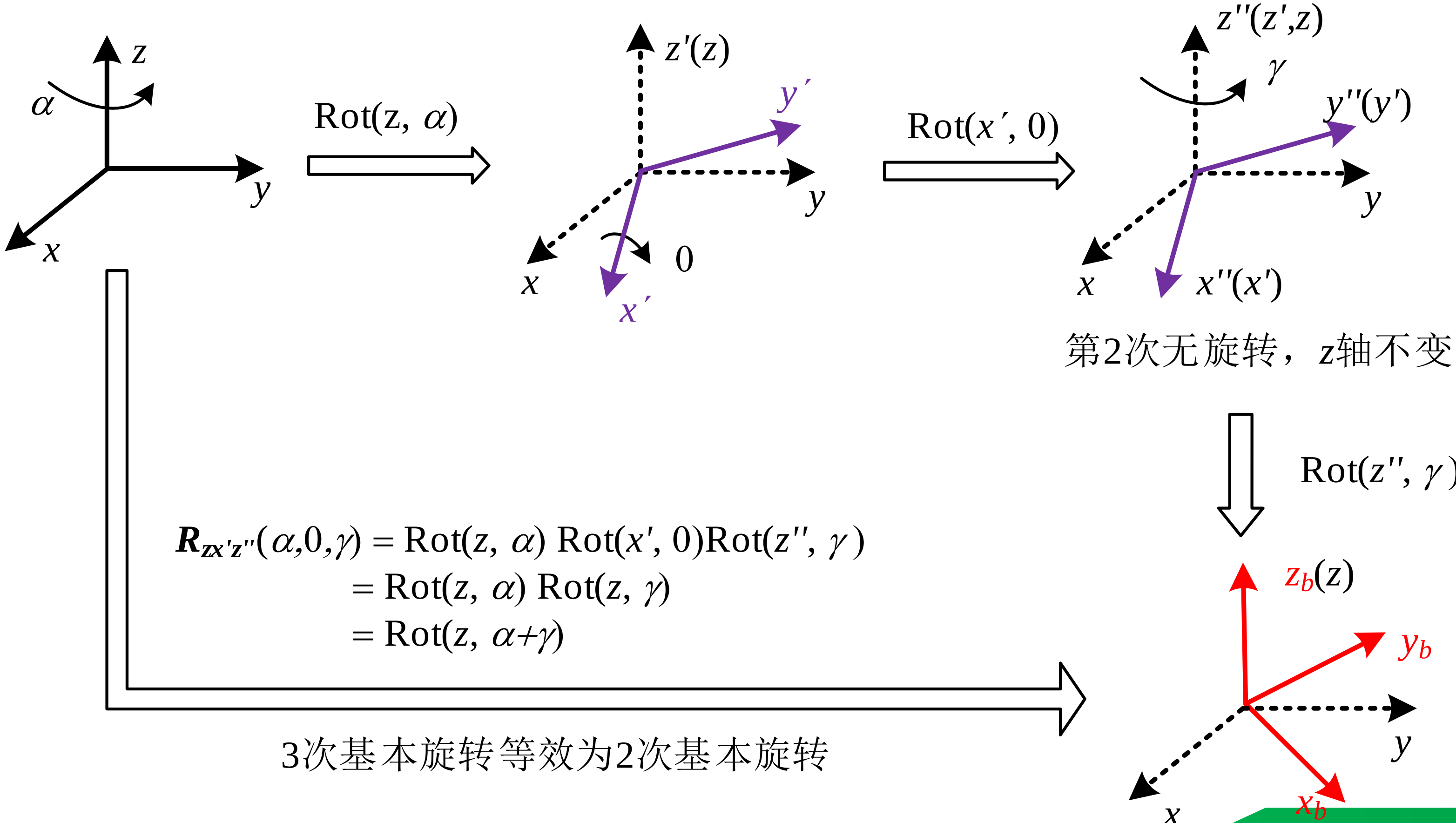


$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{xy'z''}(\alpha,\pi/2,\gamma) &= \mathrm{Rot}(x,\ \alpha)\ \mathrm{Rot}(y',\ \pi/2)\mathrm{Rot}(z'',\ \gamma\ ) \\
&= \mathrm{Rot}(x,\ \gamma)\ \mathrm{Rot}(x,\ \alpha)\ \mathrm{Rot}(y',\ \pi/2) \\
&= \mathrm{Rot}(x,\ \alpha+\gamma)\ \mathrm{Rot}(y',\ \pi/2)
\end{aligned}
$$

三次基本旋转等效为两次基本旋转

3. 第II类欧拉角姿态奇异性分析（zxz欧拉角为例）

- 当第2次旋转$\beta=0$或π时，z”与x同轴，使得第3和第1转角叠加或抵消



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{R}_{zx'z''}(\alpha,0,\gamma) &= \mathrm{Rot}(z,\alpha)\,\mathrm{Rot}(x',0)\mathrm{Rot}(z'',\gamma) \\
&= \mathrm{Rot}(z,\alpha)\,\mathrm{Rot}(z,\gamma) \\
&= \mathrm{Rot}(z,\alpha+\gamma)
\end{aligned}
$$

2.3.7 定轴xyz欧拉角（又称RPY角）

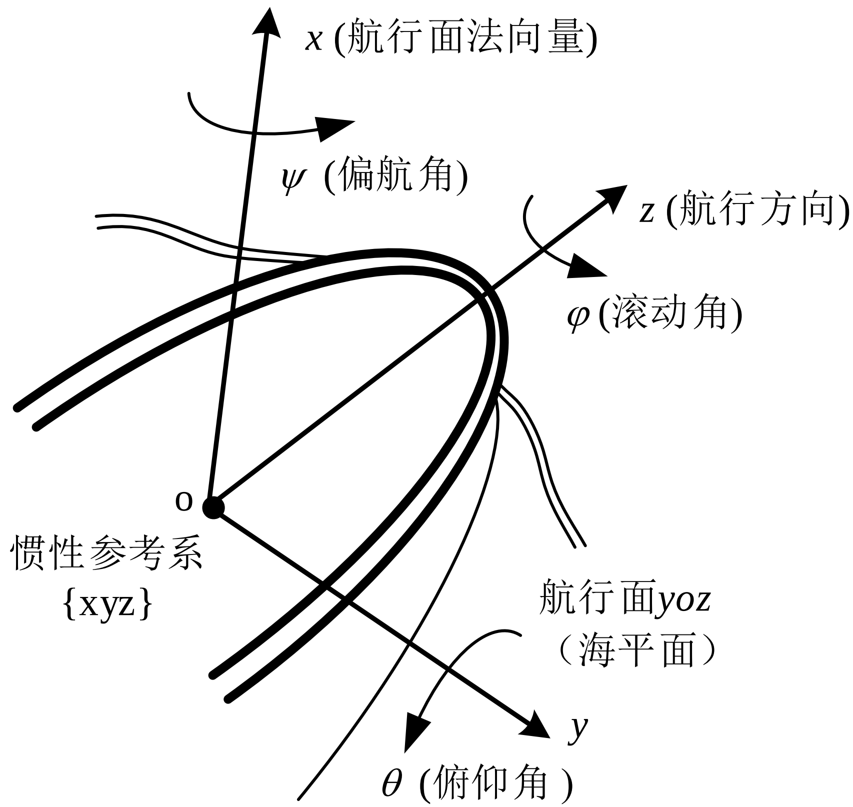
1. 旋转轴的定义

➤ **以航行方向、运动平面（海平面、水平面等）为参考定义三轴**

- ✓ **Roll (横滚)轴**
- ✓ **Pitch (俯仰)轴**
- ✓ **Yaw (偏航)轴**

➤ **赋以坐标系的含义后（非唯一）**

- ✓ **z轴**指向航行方向，称为接近矢量，**用*a*表示**；
- ✓ **x轴**为运动平面的法向量，称为法向矢量，**用*n*表示**；
- ✓ **y轴**根据右手定则确定，称为方位矢量，**用*o*表示**。



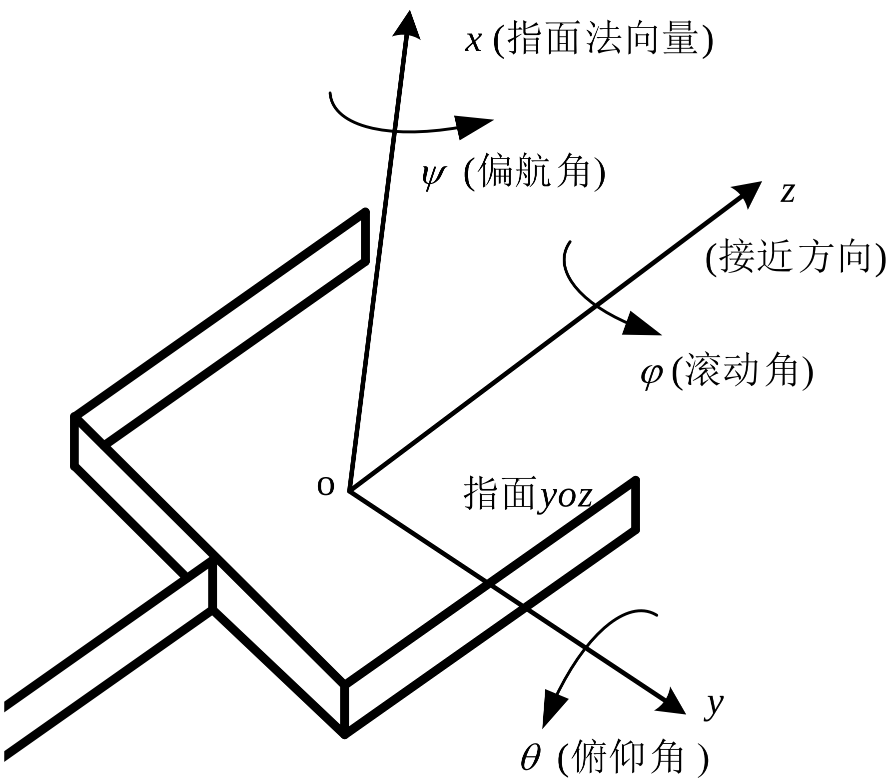
这就是之前采用*n*, *o*, *a*代表三轴的原因，且*R*=[*n*, *o*, *a*]

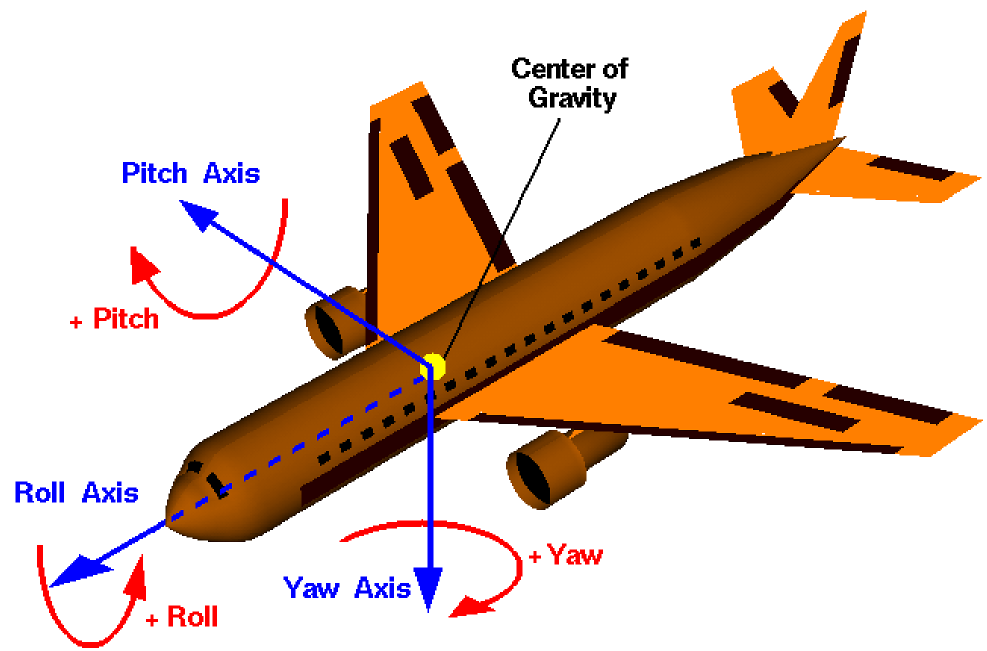
2.3.7 定轴xyz欧拉角（又称RPY角 ）

1. 旋转轴的定义

➢ 以航行方向、运动平面（海平面、水平面等）为参考定义三轴

其他常用场合：机械臂工具、飞行器





2.3.7 定轴xyz欧拉角（又称RPY角）

2. 根据RPY角求旋转变换矩阵，即 $\boldsymbol{\Psi} \rightarrow \boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}_3(\gamma)\boldsymbol{R}_2(\beta)\boldsymbol{R}_1(\alpha)=\boldsymbol{R}_z(\gamma)\boldsymbol{R}_y(\beta)\boldsymbol{R}_x(\alpha)$$

$$=\begin{bmatrix} c_\gamma & -s_\gamma & 0 \\ s_\gamma & c_\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_\beta & 0 & s_\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\beta & 0 & c_\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\alpha & -s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} c_\gamma c_\beta & c_\gamma s_\beta s_\alpha - s_\gamma c_\alpha & c_\gamma s_\beta c_\alpha + s_\gamma s_\alpha \\ s_\gamma c_\beta & s_\gamma s_\beta s_\alpha + c_\gamma c_\alpha & s_\gamma s_\beta c_\alpha - c_\gamma s_\alpha \\ -s_\beta & c_\beta s_\alpha & c_\beta c_\alpha \end{bmatrix}$$

注：RPY角还有专门的表示，即

$$\boldsymbol{\Psi}=\begin{bmatrix} \psi \\ \theta \\ \varphi \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{相当于}} \begin{cases} \alpha=\psi \\ \beta=\theta \\ \gamma=\varphi \end{cases}$$

2.3.7 定轴xyz欧拉角（又称RPY角）

3. 根据旋转变换矩阵求RPY角，即$R \rightarrow \Psi$

若$(a_{13} = \pm 1)$，

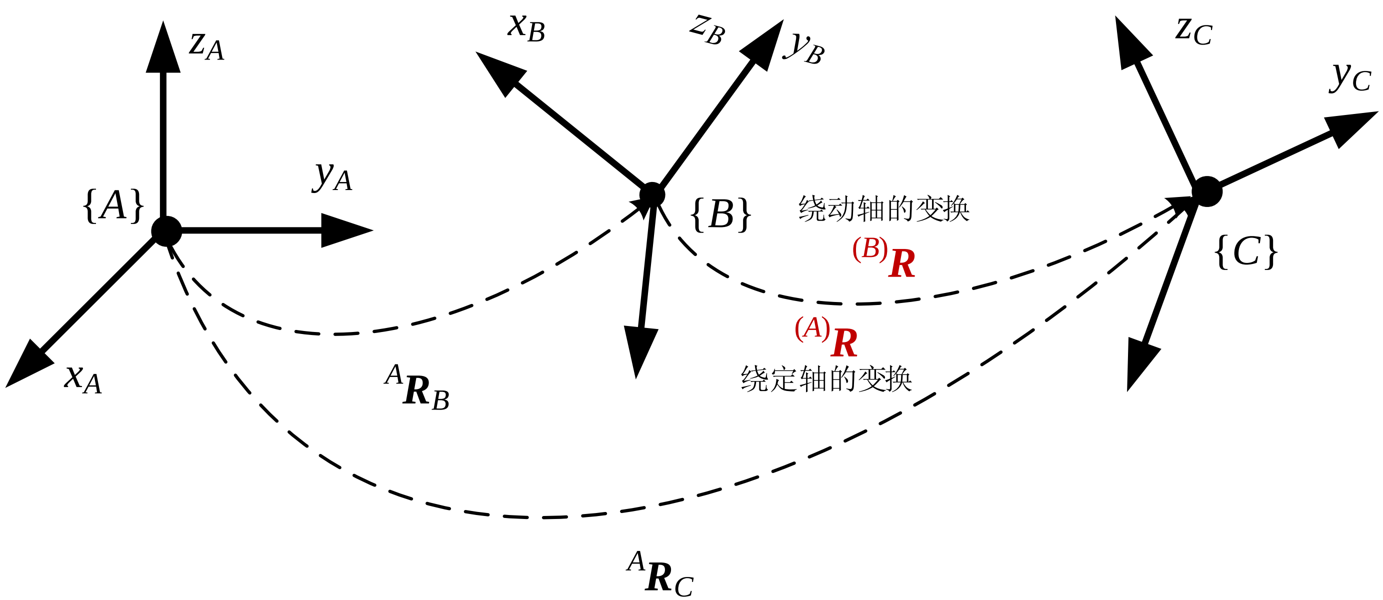
$$\begin{cases} \beta = \mp \dfrac{\pi}{2} \\ \alpha \mp \gamma = \operatorname{atan2}(\pm a_{12}, a_{22}) \end{cases}$$

其他，

$$\begin{cases} \beta = \arcsin(-a_{31}) \quad \text{或} \quad \beta = \pi - \arcsin(-a_{31}) \\ \alpha = \operatorname{atan2}(a_{32}/c_\beta,\ a_{33}/c_\beta) \\ \gamma = \operatorname{atan2}(a_{21}/c_\beta,\ a_{11}/c_\beta) \end{cases}$$

小结及补充说明

◆ 旋转变换的两种形式



①动轴旋转变换，$^{(B)}\boldsymbol{R}$中的矢量为{B}系下表示的矢量

②定轴旋转变换，$^{(A)}\boldsymbol{R}$中的矢量为{A}系下表示的矢量

小结及补充说明

◆ 旋转变换后的姿态矩阵

构建规则：

- 矩阵$^{(B)}R$中的矢量为{B}系下表示的矢量，{B}系在右侧，通过右乘构建；
- 矩阵$^{(A)}R$中的矢量为{A}系下表示的矢量，{A}系在左侧，通过左乘构建。

变换矩阵中的矢量是动轴中描述的矢量

动轴旋转变换后的姿态矩阵 ➡ $^{A}\boldsymbol{R}_C = {}^{A}\boldsymbol{R}_B \cdot {}^{(B)}\boldsymbol{R}$

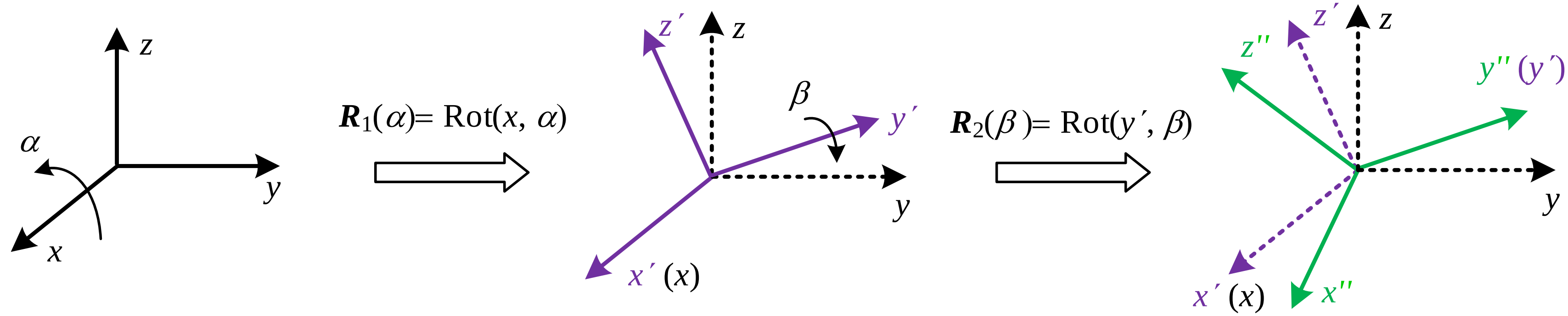
定轴旋转变换后的姿态矩阵 ➡ $^{A}\boldsymbol{R}_C = {}^{(A)}\boldsymbol{R} \cdot {}^{A}\boldsymbol{R}_B$

变换矩阵中的矢量是定轴中描述的矢量

小结及补充说明

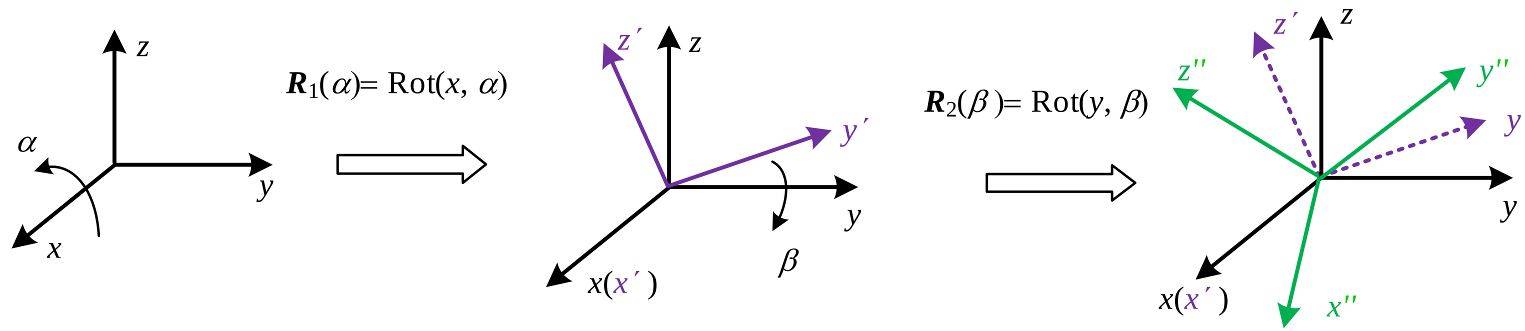
◆ 动轴欧拉角

➢ R1、R2、R3矩阵中的矢量是动轴下的表示



◆ 定轴欧拉角

➢ R1、R2、R3矩阵中的矢量是定轴下的表示



小结及补充说明

- 动轴欧拉角到姿态矩阵的构建，右乘

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_1 $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_2 = {}^{0}\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_3 = {}^{0}\boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_3 $$

- 定轴欧拉角到姿态矩阵的构建，左乘

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_1 $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_2 \, {}^{0}\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 $$

$$ {}^{0}\boldsymbol{R}_3 = \boldsymbol{R}_3 \, {}^{0}\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{R}_3 \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{R}_1 $$

56/76

主要内容

2.4.1 轴-角表示法

◆ 三次基本旋转到一次等效旋转

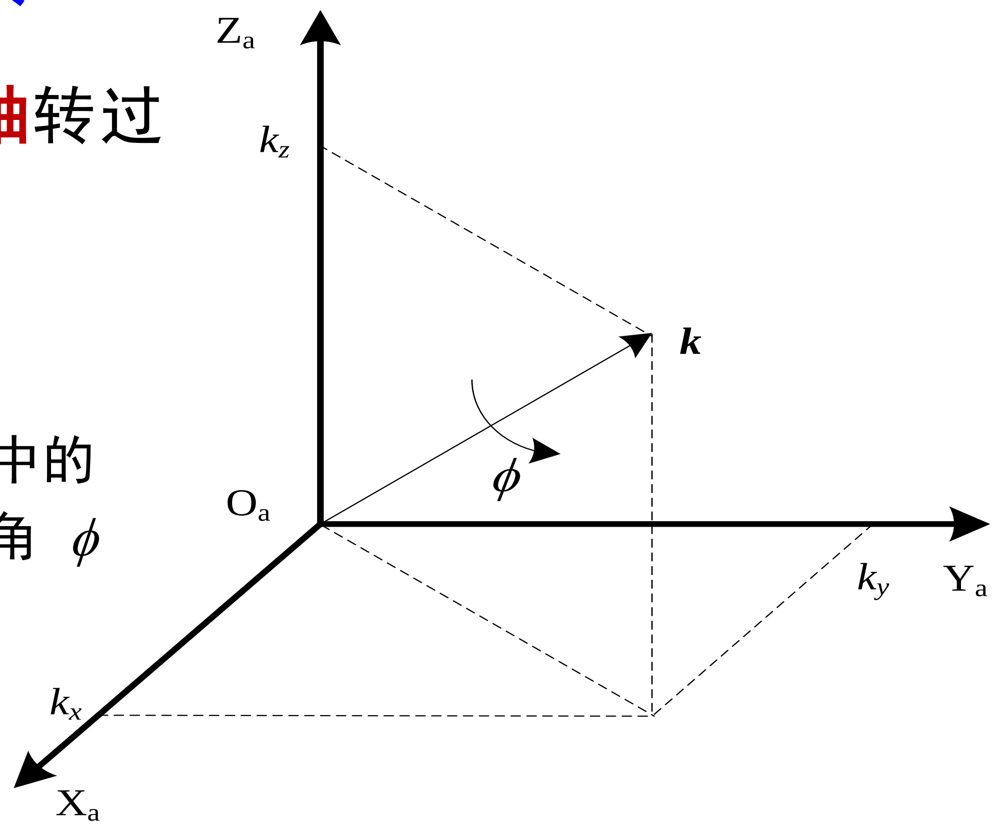
刚体的空间姿态可由绕某个**轴**转过一个**角**度而得到。

➢ 欧拉轴-角公式

用单位矢量转轴k在参考坐标系Σa中的三个分量*kx*，*ky*，*kz*以及绕此转轴的转角 ϕ 这四个参数来描述，记为 $(\boldsymbol{k}, \phi)$。

其中：

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 1$$



2.4.1 轴-角表示法

◆ **旋转变换通式，即(k, ϕ) →R**

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{Rot}\left(\boldsymbol{k},\phi\right)=c_\phi\boldsymbol{I}+\left(1-c_\phi\right)\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}^T+s_\phi\boldsymbol{k}^\times$$

其中， 为3×3的单位矩阵， $k^\times$为矢量k的反对称矩阵，即：

$$\boldsymbol{k}^\times=\begin{bmatrix}0 & -k_z & k_y\\ k_z & 0 & -k_x\\ -k_y & k_x & 0\end{bmatrix}$$

因此，有：

$$\boldsymbol{R}=\mathrm{Rot}\left(\boldsymbol{k},\phi\right)=\begin{bmatrix}k_x^2\left(1-c_\phi\right)+c_\phi & k_yk_x\left(1-c_\phi\right)-k_zs_\phi & k_zk_x\left(1-c_\phi\right)+k_ys_\phi\\ k_xk_y\left(1-c_\phi\right)+k_zs_\phi & k_y^2\left(1-c_\phi\right)+c_\phi & k_zk_y\left(1-c_\phi\right)-k_xs_\phi\\ k_xk_z\left(1-c_\phi\right)-k_ys_\phi & k_yk_z\left(1-c_\phi\right)+k_xs_\phi & k_z^2\left(1-c_\phi\right)+c_\phi\end{bmatrix}$$

◆ 等效转轴和等效转角，即$R \to (k, \phi)$

观察：

$$\boldsymbol{R} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{k},\phi) = \begin{bmatrix} k_x^2(1-c_\phi)+c_\phi & k_yk_x(1-c_\phi)-k_zs_\phi & k_zk_x(1-c_\phi)+k_ys_\phi \\ k_xk_y(1-c_\phi)+k_zs_\phi & k_y^2(1-c_\phi)+c_\phi & k_zk_y(1-c_\phi)-k_xs_\phi \\ k_xk_z(1-c_\phi)-k_ys_\phi & k_yk_z(1-c_\phi)+k_xs_\phi & k_z^2(1-c_\phi)+c_\phi \end{bmatrix}$$

可知满足：

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=1+2c_\phi \Rightarrow \phi = \pm\arccos\left(\frac{tr(\boldsymbol{R})-1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a_{32}-a_{23}=2k_xs_\phi \\ a_{13}-a_{31}=2k_ys_\phi \\ a_{21}-a_{12}=2k_zs_\phi \end{cases} \Rightarrow \boldsymbol{k} = \frac{1}{2s_\phi}\begin{bmatrix} a_{32}-a_{23} \\ a_{13}-a_{31} \\ a_{21}-a_{12} \end{bmatrix}$$

2.4.2 单位四元数表示法

◆ 四元数为复数的推广，定义如下：

$$Q = \eta + \varepsilon_x \vec{i} + \varepsilon_y \vec{j} + \varepsilon_z \vec{k} = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\} = \begin{bmatrix} \eta & \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$$

其中，η为**标量**部分，$\boldsymbol{\varepsilon}$为**矢量**部分，满足：

➢ 四元数的数学计算规则

- 四元数的乘积：$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_1 \circ \boldsymbol{Q}_2 = \{\eta_1\eta_2 - \boldsymbol{\varepsilon}_1 \bullet \boldsymbol{\varepsilon}_2,\ \eta_1\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \eta_2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1 \times \boldsymbol{\varepsilon}_2\}$
- 四元数的共轭：$\boldsymbol{Q} = \{\eta,\ \boldsymbol{\varepsilon}\}$，$\quad \boldsymbol{Q}^* = \{\eta,\ -\boldsymbol{\varepsilon}\}$
- 四元数的模：$\|\boldsymbol{Q}\| = \sqrt{\eta^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2}$
- 四元数的倒数：$\boldsymbol{Q}^{-1} = \dfrac{\boldsymbol{Q}^*}{\|\boldsymbol{Q}\|^2}$

➢ 单位四元数，还满足： $\|\boldsymbol{Q}\| = \eta^2 + \varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2 = 1,\quad \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^*$

2.4.2 单位四元数表示法

◆ 单位四元数与其他表示方法的关系：

➢ 轴–角到单位四元数， **(*k*, ϕ)** →***Q***：

$$\boldsymbol{Q}=\{\eta,\boldsymbol{\varepsilon}\}=\left\{\cos\frac{\phi}{2},\quad \boldsymbol{k}\sin\frac{\phi}{2}\right\}$$

即：

$$\begin{cases}\eta=\cos\dfrac{\phi}{2}\\ \boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{k}\sin\dfrac{\phi}{2}\end{cases}$$

➢ 单位四元数到旋转变换矩阵， ***Q***→***R***：

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\eta^2+\varepsilon_x^2-\varepsilon_y^2-\varepsilon_z^2 & 2(\varepsilon_x\varepsilon_y-\varepsilon_z\eta) & 2(\varepsilon_x\varepsilon_z+\varepsilon_y\eta)\\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_y+\varepsilon_z\eta) & \eta^2-\varepsilon_x^2+\varepsilon_y^2-\varepsilon_z^2 & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z-\varepsilon_x\eta)\\ 2(\varepsilon_x\varepsilon_z-\varepsilon_y\eta) & 2(\varepsilon_y\varepsilon_z+\varepsilon_x\eta) & \eta^2-\varepsilon_x^2-\varepsilon_y^2+\varepsilon_z^2\end{bmatrix}$$

2.4.2 单位四元数表示法

◆ 旋转变换矩阵到单位四元数， $R \to Q$:

➢ $if \quad (1 + a_{11} + a_{22} + a_{33}) \neq 0$

$$\begin{cases} \eta = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + a_{11} + a_{22} + a_{33})} \\ \varepsilon_x = \frac{1}{4\eta}(a_{32} - a_{23}) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{4\eta}(a_{13} - a_{31}) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{4\eta}(a_{21} - a_{12}) \end{cases}$$

➢ $if \quad (1 + a_{11} - a_{22} - a_{33}) \neq 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 + a_{11} - a_{22} - a_{33})} \\ \varepsilon_y = \frac{1}{4\varepsilon_x}(a_{12} + a_{21}) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{4\varepsilon_x}(a_{13} + a_{31}) \\ \eta = \frac{1}{4\varepsilon_x}(a_{23} + a_{32}) \end{cases}$$

➢ $if \quad (1 - a_{11} + a_{22} - a_{33}) \neq 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - a_{11} + a_{22} - a_{33})} \\ \varepsilon_x = \frac{1}{4\varepsilon_y}(a_{12} + a_{21}) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{4\varepsilon_y}(a_{23} + a_{32}) \\ \eta = \frac{1}{4\varepsilon_y}(a_{13} - a_{31}) \end{cases}$$

➢ $if \quad (1 - a_{11} - a_{22} + a_{33}) \neq 0$

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \pm \frac{1}{2}\sqrt{(1 - a_{11} - a_{22} + a_{33})} \\ \varepsilon_x = \frac{1}{4\varepsilon_z}(a_{13} + a_{31}) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{4\varepsilon_z}(a_{23} + a_{32}) \\ \eta = \frac{1}{4\varepsilon_z}(a_{21} - a_{12}) \end{cases}$$

2.4.2 单位四元数表示法

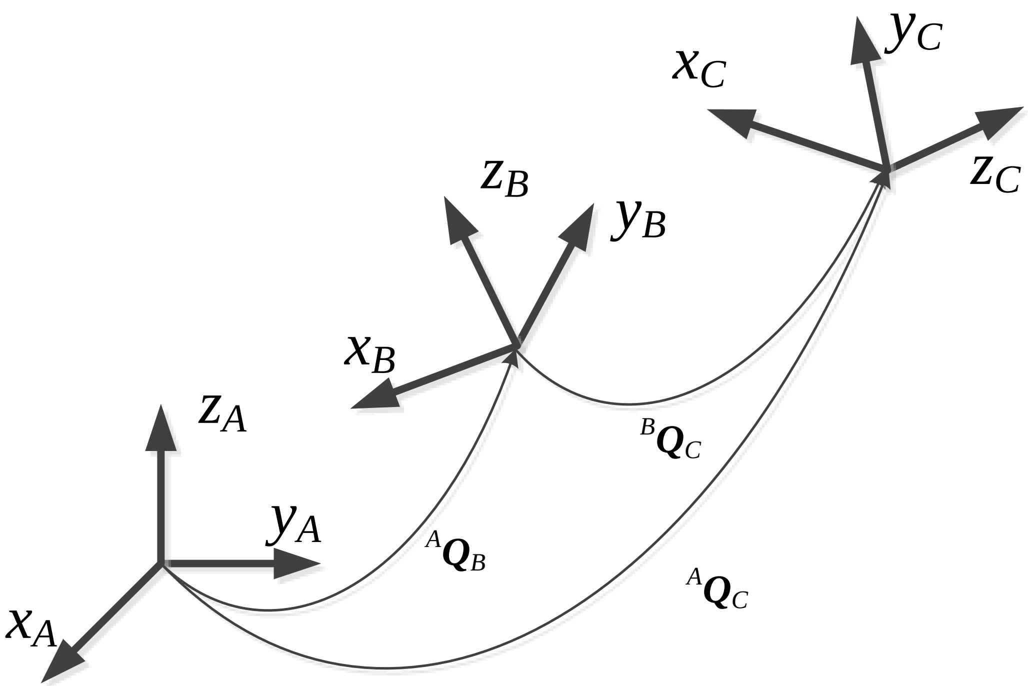
◆ 有限转动的合成（多个坐标系之间的姿态变换）

如右图的关系中有（从左往右乘）：

$$^{A}\mathbf{Q}_C = {}^{A}\mathbf{Q}_B \circ {}^{B}\mathbf{Q}_C$$

对于有n个连续变换，则有：

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \circ \mathbf{Q}_2 \circ \cdots \circ \mathbf{Q}_n$$



2.4.3 各种姿态表示方法的对比

◆ 有限转动的合成（多个坐标系之间的姿态变换）

姿态表示	优点	缺点
旋转矩阵法 (9参数)	矢量变换、坐标系间的传递简单方便，线性乘	姿态表示不直观； 需要9个非独立参数
欧拉角法 (3参数)	最小参数描述，直观	存在姿态表示的奇异； 矢量及坐标变换不方便
轴角公式法 (4参数)	直观，无姿态表示奇异性	矢量变换、坐标系间的传递计算复杂，应用不便
单位四元数法 (4参数)	无奇异的最小参数姿态表示； 矢量变换、坐标系间的传递简单方便	姿态表示不直观

65/76

主要内容

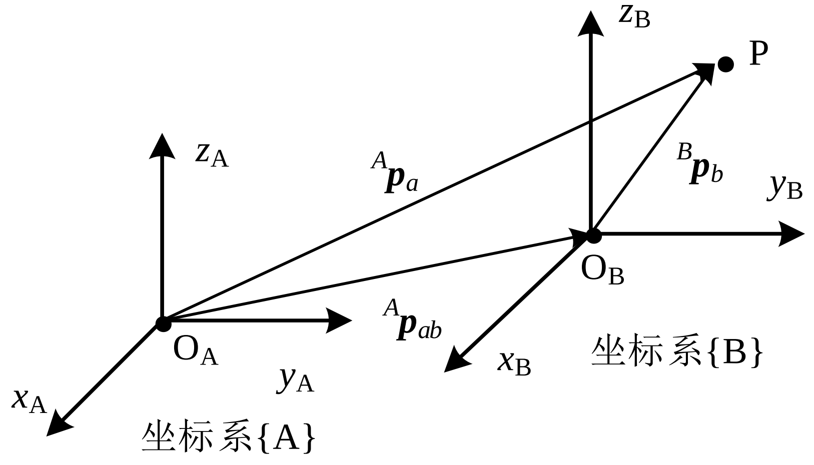
2.5.1矢量变换

◆ 坐标平移

➢ 参考系的指向不变，原点位置改变

点P在参考系{A}、{B}中的位置矢量满足：

$$^{A}\boldsymbol{p}_a = {}^{A}\boldsymbol{p}_{ab} + {}^{B}\boldsymbol{p}_b$$

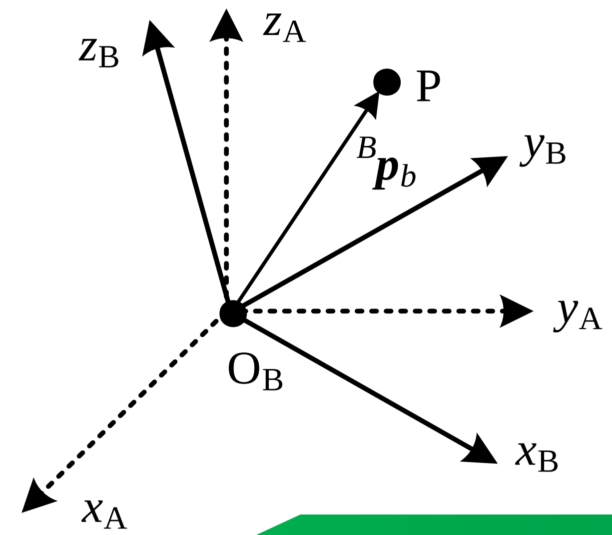


◆ 坐标旋转

➢ 参考系的原点不变，指向发生了变化

点P在参考系{A}、{B}中的位置矢量满足：

$$^{A}\boldsymbol{p}_a = {}^{A}\boldsymbol{R}_B \, {}^{B}\boldsymbol{p}_b$$

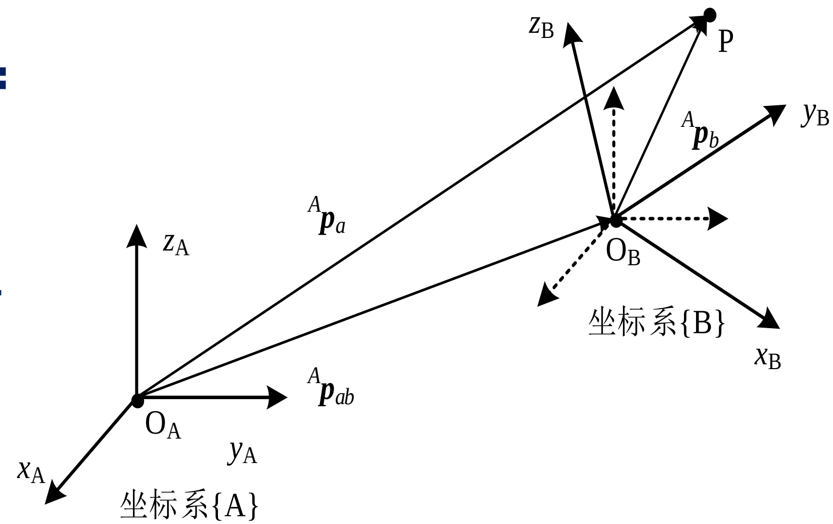


◆ 一般变换

➢ 参考系的原点和指向都发生了变化

点P在参考系{A}、{B}中的位置矢量满足：

$$^{A}\boldsymbol{p}_a = {}^{A}\boldsymbol{p}_{ab} + {}^{A}\boldsymbol{p}_b = {}^{A}\boldsymbol{p}_{ab} + {}^{A}\boldsymbol{R}_B {}^{B}\boldsymbol{p}_b$$



上式包含了矢量/矩阵乘、加运算，公式推导不方便。若额外增加一行，可得：

$$\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{p}_a \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{R}_B & ^{A}\boldsymbol{p}_{ab} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p}_b \\ 1 \end{bmatrix}$$

所得到的式子只包含了下列向量/矩阵的线性乘积，具有齐次性（homogeneous）

$$\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{p}_a \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ^{B}\boldsymbol{p}_b \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{R}_B & ^{A}\boldsymbol{p}_{ab} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

齐次坐标

齐次变换

2.5.2齐次坐标与齐次变换

◆ 齐次坐标（Homogeneous Coordinates）

若点的坐标为：

$$\boldsymbol{p}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix}$$

则称下式为点的齐次坐标为：

$$\bar{\boldsymbol{p}}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{p} \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix}=\left[p_x, p_y, p_z, 1\right]^{\mathrm{T}}$$

◆ 齐次变换矩阵（Homogeneous Transformation Matrix）

$$^{A}\boldsymbol{T}_{B}=\begin{bmatrix} ^{A}\boldsymbol{R}_{B} & ^{A}\boldsymbol{p}_{ab} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{o} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{p} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

（包含了两坐标系间完整的位置、姿态信息）

◆ 齐次变换（Homogeneous Transformation）

$$^{A}\bar{\boldsymbol{p}}_{a}={}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\,{}^{B}\bar{\boldsymbol{p}}_{b}$$

（包含了坐标平移、旋转的完整变换）

◆ 纯平移的齐次变换

单轴平移：

$$\boldsymbol{T}_{Lx}\left(p_x\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&p_x\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{Ly}\left(p_y\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&p_y\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{Lz}\left(p_z\right)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

三轴合成平移：

$$\boldsymbol{T}_L\left(\boldsymbol{p}\right)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}&\boldsymbol{p}\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&p_x\\0&1&0&p_y\\0&0&1&p_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

◆ 纯旋转的齐次变换

单轴旋转：

$$\boldsymbol{T}_{Rx}(\varphi)=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&c_\varphi&-s_\varphi&0\\0&s_\varphi&c_\varphi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{Ry}(\varphi)=\begin{bmatrix}c_\varphi&0&s_\varphi&0\\0&1&0&0\\-s_\varphi&0&c_\varphi&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{T}_{Rz}(\varphi)=\begin{bmatrix}c_\varphi&-s_\varphi&0&0\\s_\varphi&c_\varphi&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

等效轴角旋转：

$$\boldsymbol{T}_R(\boldsymbol{k},\phi)=\overline{\mathrm{Rot}}(\boldsymbol{k},\phi)=\begin{bmatrix}\mathrm{Rot}(\boldsymbol{k},\phi)&0\\0&1\end{bmatrix}$$

2.5.3齐次变换的逆与合成

◆ 齐次变换的逆

齐次变换矩阵的一般形式：

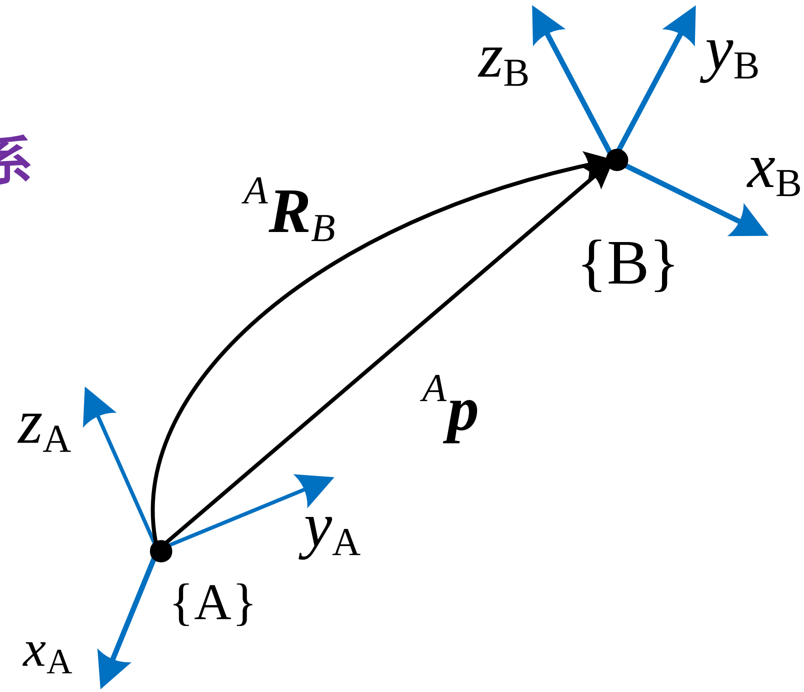
$$T=\begin{bmatrix} R & p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R——坐标系之间的姿态

P——坐标系之间的原点关系

齐次变换矩阵的逆：

$$T^{-1}=\begin{bmatrix} R^{-1} & -R^{-1}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^{\mathrm{T}} & -R^{\mathrm{T}}p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



若考虑具体坐标系之间的关系，则有

$$^{B}T_{A}=\left({}^{A}T_{B}\right)^{-1}=\begin{bmatrix} {}^{B}R_{A} & -{}^{B}R_{A}\cdot{}^{A}p_{ab} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

从{B}到{A}的齐次变换，与从{B}到{A}的齐次变换互为逆

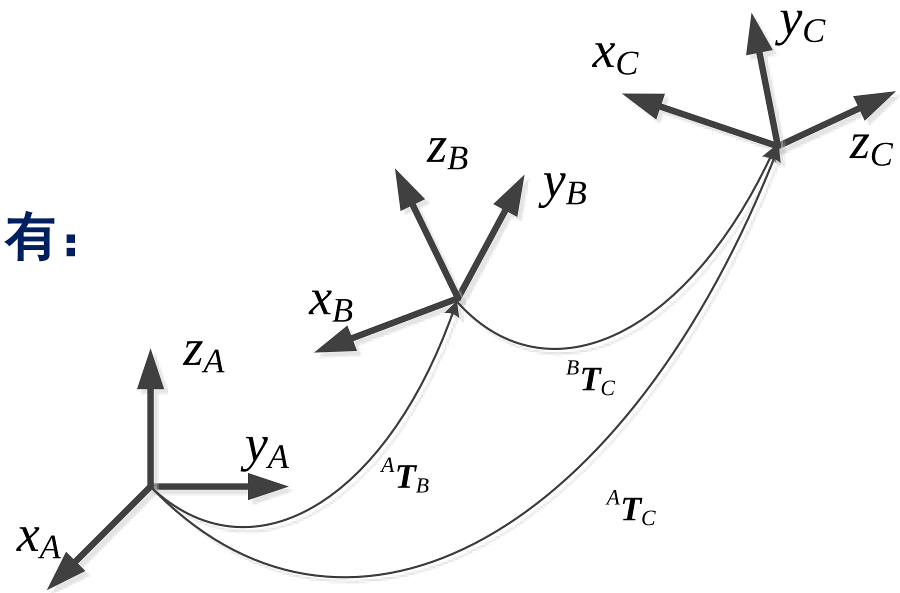
◆ 齐次变换的传递

若 {A}到{B}的齐次变换矩阵为 ${}^{A}T_{B}$

{B}到{C}的齐次变换矩阵为 ${}^{B}T_{C}$

则 {A}到{C}的齐次变换矩阵为 ${}^{A}T_{C}$，有：

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{C} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\,{}^{B}\boldsymbol{T}_{C} $$

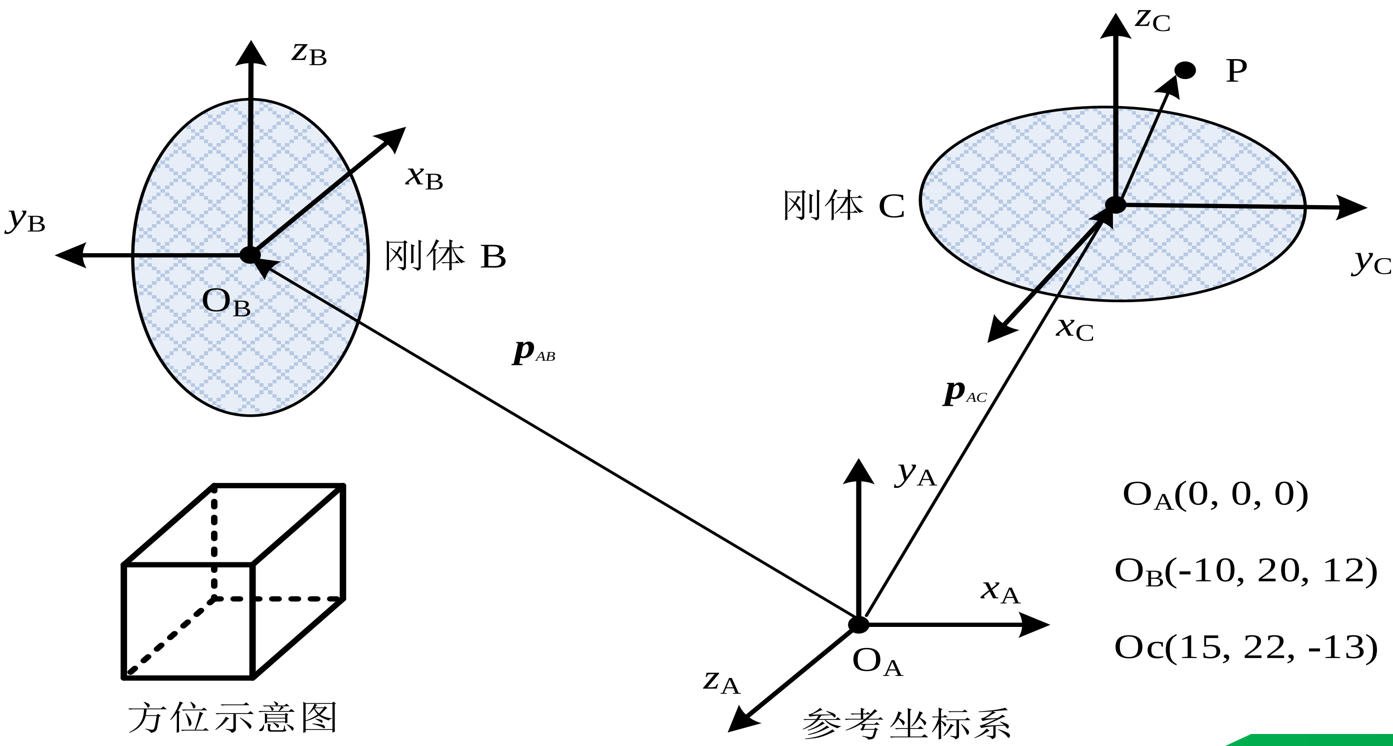


对于n个连续的齐次变换矩阵，有：

$$ \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_1\boldsymbol{T}_2\cdots\boldsymbol{T}_n $$

◆ 举例

各坐标系的相对关系如下图示。已知{B}、{C}的原点在{A}中的坐标分别为O_B(-10, 20, 12)、O_C(15, 22, -13)，点P在{C}中的坐标为${}^{C}P_c=[8, 16, 9]^T$，分别计算点P在坐标系{A}和{B}中的位置。



◆ 举例

根据已知条件，通过观察，可先得下列齐次变换矩阵：

$$ {}^{A}\boldsymbol{T}_{B}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \\ -1 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\quad {}^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 1 & 22 \\ 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

可通过下式计算得到{B}到{C}的齐次变换矩阵：

$$ {}^{B}\boldsymbol{T}_{C}={}^{B}\boldsymbol{T}_{A}\,{}^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\left({}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\right)^{-1}\,{}^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 25 \\ 0 & -1 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

◆ 举例

已知点P在{C}中的直角坐标，可得其相应的齐次坐标为：

$$ {}^{C}\boldsymbol{p}_C = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_C = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} $$

采用齐次变换可得点P在{A}、{B}中的齐次坐标，进而得到直角坐标：

$$ {}^{A}\overline{\boldsymbol{p}}_C = {}^{A}\boldsymbol{T}_C \, {}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_C = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}\boldsymbol{p}_C = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ -5 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}\overline{\boldsymbol{p}}_C = {}^{B}\boldsymbol{T}_C \, {}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_C = \begin{bmatrix} 17 \\ -41 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{B}\boldsymbol{p}_C = \begin{bmatrix} 17 \\ -41 \\ 11 \end{bmatrix} $$

谢 谢！

计算实例

解：（1）根据已知条件，可直接写出$^{A}\boldsymbol{T}_{B}$，$^{A}\boldsymbol{T}_{C}$的齐次变换矩阵

$$^{A}\boldsymbol{T}_{B}=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -10\\ 0 & 0 & 1 & 20\\ -1 & 0 & 0 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad ^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 1 & 22\\ 1 & 0 & 0 & -13\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

根据坐标系间的关系，通过计算{B}到{C}的齐次变换矩阵：

$$^{B}\boldsymbol{T}_{C}={}^{B}\boldsymbol{T}_{A}\,{}^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\left({}^{A}\boldsymbol{T}_{B}\right)^{-1}\,{}^{A}\boldsymbol{T}_{C}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0 & 25\\ 0 & -1 & 0 & -25\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

计算实例

解：（2）已知点P在{C}中的直角坐标，可得其相应的齐次坐标为：

$$ {}^{C}\boldsymbol{p}_{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_{C} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} $$

采用齐次变换可得点P在{A}、{B}中的齐次坐标，进而得到直角坐标：

$$ {}^{A}\overline{\boldsymbol{p}}_{C} = {}^{A}\boldsymbol{T}_{C}\,{}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_{C} = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{A}\boldsymbol{p}_{C} = \begin{bmatrix} 31 \\ 31 \\ -5 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{B}\overline{\boldsymbol{p}}_{C} = {}^{B}\boldsymbol{T}_{C}\,{}^{C}\overline{\boldsymbol{p}}_{C} = \begin{bmatrix} 17 \\ -41 \\ 11 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow {}^{B}\boldsymbol{p}_{C} = \begin{bmatrix} 17 \\ -41 \\ 11 \end{bmatrix} $$